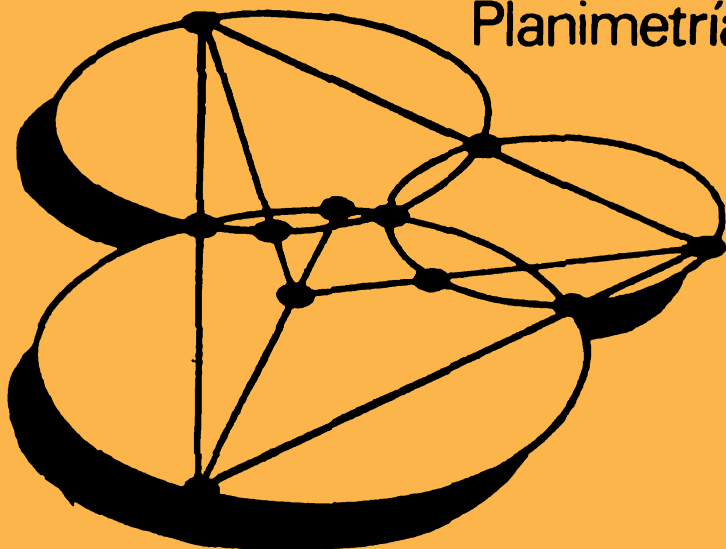
ciencia popular

Problemas de geometría

Planimetría



I.Shariguin

El libro contiene más de 600 problemas de planimetría. Es una colección de diversos hallazgos geométricos, cuyo objetivo consiste en hacer ver lo elegantes que son los procedimientos de geometría elemental que se pueden aplicar en la demostración y el cálculo.

Editorial · Mir · Moscú

Problemas de geometría
Planimetría

И. Ф. ШАРЫГИН

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ
ПЛАНИМЕТРИЯ

МОСКВА «НАУКА»

Ciencia popular

I. Shariguin

Problemas de geometría
Planimetría



Editorial Mir Moscú

Traducido del ruso por G. Lozhkin

Impreso en la URSS

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

На испанском языке

ISBN 5-03-000657-5

Indice

Prefacio

Hoy día, al estudiar la geometría, los alumnos aprenden diferentes conceptos y medios de resolución de los problemas, pero precisamente su variedad deja poco tiempo para adquirir hábitos en la solución de estos problemas. Sin duda, es discutible la cuestión de hasta qué grado es importante aprender a solucionar los problemas geométricos difíciles. Puede ser que, realmente, para los que enlazan su futuro con las profesiones de matemático o programador, es más útil ocuparse de los problemas de lógica combinatoria, estudiar los principios del análisis y aprender a componer programas para los ordenadores. Sin embargo, el autor considera que una imaginación geométrica desarrollada es una cualidad necesaria para el futuro matemático y útil para los futuros ingenieros, físicos, constructores, arquitectos y muchos otros especialistas.

En el primer apartado, sobre todo en su segunda mitad, se encuentran problemas bastante difíciles. En el segundo apartado, destinado para un lector apasionado por la geometría, la dificultad de los problemas crece, aunque también aquí cada párrafo empieza con problemas de introducción relativamente

simples. Los criterios más importantes empleados al elegir los problemas fueron: el carácter natural de la enunciación, la solución por medio de la geometría, el carácter inesperado del resultado y la originalidad del problema.

Pese a la clasificación en lo fundamental según el objeto que figura en el problema, el autor no intentó sistematizar los problemas por tipos y métodos de solución, por su pertenencia a uno u otro apartado de la geometría. En esencia, casi cada problema geométrico (en comparación con los ejercicios rutinarios para solucionar las ecuaciones, las desigualdades, etc.) es original: para solucionar cada uno de éstos hay que hallar qué construcciones adicionales deben hacerse, qué fórmulas y teoremas es necesario usar. Por eso el presente libro de ningún modo puede considerarse como una colección de problemas del curso sistemático de geometría; más exactamente, es una colección de diferentes hallazgos geométricos, cuyo objetivo consiste en demostrar la elegancia de los procedimientos de geometría elemental aplicados con el fin de demostrar y calcular (sin recurrir al empleo del álgebra vectorial y usando al mínimo el método de coordenadas, las transformaciones geométricas y, quizás, un poco más la trigonometría).

El primer apartado empieza con un conjunto de hechos geométricos que confinan al curso de geometría que se estudia en 6—8 grados de secundaria. Muchos de ellos figuran en los manuales de escuela tradicionales. Ade-

más, en este apartado fueron reunidos los problemas (en lo fundamental para «calcular» los elementos de las figuras geométricas) destinados para reforzar el conocimiento de las fórmulas y los teoremas fundamentales estudiados, desarrollar la técnica de resolución de problemas geométricos. La práctica de resolución de problemas ayudará al lector a prepararse para los exámenes escolares y los de ingreso a la Universidad. La primera mitad de este apartado contiene unos problemas relativamente simples, por lo cual tienen sólo las respuestas, más adelante la complejidad de los problemas crece, a éstos acompañan indicaciones de cómo hay que solucionarlos o resoluciones detalladas.

Es difícil garantizar que el autor en cada caso logre encontrar la vía «óptima» de solución sin hablar ya de que algunos problemas (aunque, por lo visto, no muchos) el experto en geometría resolvería de manera más breve, aprovechando la inversión, los métodos de geometría proyectiva, etc. El autor premeditadamente no ha trazado todos los enlaces y generalizaciones posibles de los problemas, como lo hacen los matemáticos teóricos que desean descubrir en cada caso concreto el hecho general más transparente desde el punto de vista de la lógica, sino que ha actuado, más bien, como un físico práctico que debe resolver un problema concreto ateniéndose al criterio siguiente: si no se descubre una solución simple y elegante hace falta «calcular». Probablemente, algunos lectores no renunciarán al placer de hallar una solución mejor a algunos

problemas propuestos por el autor. No obstante, hay que indicar que algunos problemas son bastante difíciles. Si se trata de resolverlos en la escuela, éstos pueden representar interés como tema de un informe en un círculo de interés.

Aunque la originalidad de los problemas reunidos en el libro es distinta, el autor, sin embargo, guarda la esperanza de que parte de la colección representada aquí interese también a los aficionados a la geometría.

Notemos que en algunos casos los problemas tienen sólo el plan de resolución o se examina uno de los casos posibles. La necesidad de analizar por turno los diferentes casos posibles en la disposición de las figuras es una inconveniencia que se encuentra con frecuencia en las demostraciones de geometría elemental; ésta desaparece, como regla, al pasar a los vectores, los «ángulos dirigidos», el método de coordenadas, etc.; es cierto que además a menudo desaparece también la misma geometría.

A fin de hacer el libro comprensible para los lectores de diferentes generaciones y con distintos niveles de preparación se ha elegido una terminología que no coincide completamente con la aceptada hoy día en la escuela. Las figuras congruentes se llaman simplemente «iguales», no se emplean los signos y las designaciones: $\cong$, $[AB]$, (AB), etc. En algunos casos particulares, cuando se trata, por ejemplo, del triángulo ABC, se emplean las designaciones: $\angle A$, sen A, lo cual significa $\angle BAC$, sen $\angle BAC$.

I. Hechos y teoremas geométricos fundamentales. Problemas de cálculo

I.1. Demostrar que las medianas en el triángulo se intersecan en un punto y se dividen por éste en razón de 1:2.

I.2. Demostrar que las medianas dividen el triángulo en seis partes equivalentes.

I.3. Demostrar que el diámetro de la circunferencia que circunscribe un triángulo es igual a la razón entre su lado y el seno del ángulo opuesto.

I.4. Supongamos que el vértice de un ángulo se encuentra fuera de un círculo y sus lados intersecan la circunferencia. Demostrar que la magnitud del ángulo es igual a la semidiferencia entre los arcos cortados por sus lados en la circunferencia, dispuestos en el interior del ángulo.

I.5. Supongamos que el vértice de un ángulo se halla dentro de un círculo. Demostrar que la magnitud del ángulo es igual a la semisuma de los arcos, uno de los cuales se encuentra entre sus lados, mientras que el otro se halla entre sus prolongaciones más allá del vértice del ángulo.

I.6. Sea AB la cuerda de una circunferencia; l, la tangente a la misma (A es el punto de tangencia). Demostrar que cada uno de los dos ángulos entre AB y l se determina como la mitad del arco de la circunferencia comprendida en el interior del ángulo examinado.

I.7. Por el punto M situado a la distancia a del centro de la circunferencia de radio R ($a > R$), está trazada una secante que corta la circunferencia en los puntos A y B. Demostrar que $|MA|\cdot|MB|$ es constante para todas las secantes y es igual a $a^2 - R^2$ (al cuadrado de la longitud de la tangente).

I.8. Por el punto M que se halla a una distancia a del centro de una circunferencia de radio R ($a < R$), pasa la cuerda AB. Demostrar que $|AM|\cdot|MB|$ es constante para todas las cuerdas y es igual a $R^2 - a^2$.

I.9. Sea AM la bisectriz del triángulo ABC. Demostrar que $|BM| : |CM| = |AB| : |AC|$. Lo mismo es cierto para la bisectriz del ángulo exterior del triángulo. (En este caso M se halla en la prolongación del lado BC).

I.10. Demostrar que la suma de las diagonales al cuadrado de un paralelogramo es igual a la suma de sus lados al cuadrado.

I.11. Los lados de un triángulo son a, b y c. Demostrar que la mediana m_a trazada hacia el lado a se calcula por la fórmula

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

I.12. Tenemos dos triángulos con un vértice A común, los demás vértices se encuentran

en dos rectas que pasan por A. Demostrar que la razón entre las áreas de estos triángulos es igual a la razón entre los productos de los dos lados de cada triángulo que contienen el vértice A.

I.13. Demostrar que el área de un polígono circunscrito es igual a rp, donde r es el radio de la circunferencia inscrita, p, su semiperímetro (como caso particular, esta fórmula es válida para el triángulo).

I.14. Demostrar que el área del cuadrilátero es igual al semiproducto de las diagonales por el seno del ángulo comprendido entre éstas.

I.15. Demostrar la validez de las fórmulas siguientes para calcular el área del triángulo:

$$S = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}, \quad S = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C,$$

donde A, B, C son los ángulos del triángulo, a, el lado dispuesto frente al ángulo A, R, el radio del círculo circunscrito.

I.16. Demostrar que el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo se determina por la fórmula $r = \frac{a+b-c}{2}$, donde a y b son los catetos y c, la hipotenusa.

I.17 Demostrar que si a y b son dos lados de un triángulo, α es el ángulo entre éstos y l, la bisectriz de este ángulo, entonces

$$l = \frac{2ab \cos \frac{\alpha}{2}}{a+b}.$$

I.18. Demostrar que las distancias desde el vértice A del triángulo ABC hasta los puntos de tangencia de los lados AB y AC con la circunferencia inscrita son iguales a $p - a$, donde p es el semiperímetro del triángulo ABC, $a = |BC|$.

I.19. Demostrar que si en el cuadrilátero convexo $ABCD$ se cumple la relación $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$, deberá existir una circunferencia que contacte con todos sus lados.

I.20. a) Demostrar que las alturas en un triángulo se intersecan en un punto. b) Demostrar que la distancia desde el vértice de un triángulo hasta el punto de intersección de sus alturas es dos veces mayor que la distancia desde el centro del círculo circunscrito hasta el lado opuesto.

* * *

I.21. En el lado de un ángulo recto con el vértice en el punto O se toman dos puntos A y B, siendo que $|OA| = a$, $|OB| = b$. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A y B, a la cual es tangente el otro lado del ángulo.

I.22. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a c y uno de los ángulos agudos es igual a 30°. Encontrar el radio de la circunferencia con el centro en el vértice del ángulo de 30° que divide el triángulo dado en dos partes equivalentes.

I.23. Los catetos de un triángulo rectángulo son a y b. Encontrar la distancia desde

el vértice del ángulo recto hasta el punto de la circunferencia inscrita, más próximo a aquél.

I.24. La mediana de un triángulo rectángulo es igual a m y divide el ángulo recto en razón de 1:2. Hallar el área del triángulo.

I.25. Los lados del triángulo ABC son $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$. Determinar la relación, en la cual el punto de intersección de las bisectrices divide la bisectriz del ángulo B.

I.26. Demostrar que la suma de las distancias desde cualquier punto de la base del triángulo isósceles hasta sus lados es igual a la altura de este triángulo trazada hasta el lado de éste.

I.27. Demostrar que la suma de las distancias desde cualquier punto interior de un triángulo regular hasta sus lados es igual a la altura de este triángulo.

I.28. Sobre la base AC del triángulo isósceles ABC se toma un punto M de manera que $|AM| = a$, $|MC| = b$. En los triángulos ABM y CBM están inscritas circunferencias. Hallar la distancia entre los puntos de tangencia del lado BM con estas circunferencias.

I.29. Un paralelogramo con los lados a y b y el ángulo α tiene trazadas las bisectrices de los cuatro ángulos. Hallar el área del cuadrilátero limitado por las bisectrices.

I.30. Un rombo, cuya altura es h y el ángulo agudo α tiene inscrita una circunferencia. Hallar el radio de la circunferencia mayor de las dos posibles, cada una de las

cuales se roza con la circunferencia dada y con dos lados del rombo.

I.31. Determinar el ángulo agudo de un rombo, cuyo lado es la media proporcional de sus diagonales.

I.32. Las diagonales de un cuadrilátero convexo son a y b, y los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos, son iguales. Hallar el área del cuadrilátero.

I.33. El lado AD del rectángulo $ABCD$ es tres veces mayor que el lado AB; los puntos M y N dividen AD en tres partes iguales. Hallar $\angle AMB + \angle ANB + \angle ADB$.

I.34. Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A pasan las cuerdas AC y AD que tocan las circunferencias dadas. Demostrar que $|AC|^2 \cdot |BD| =$
$= |AD|^2 \cdot |BC|$.

I.35. Demostrar que la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide por la mitad el ángulo entre la mediana y la altura bajadas sobre la hipotenusa.

I.36. En una circunferencia de radio r están elegidos tres puntos de manera que la circunferencia queda dividida en tres arcos que se relacionan como 3:4:5. Desde los puntos de división hasta la circunferencia están trazadas tangentes. Hallar el área del triángulo formado por estas tangentes.

I.37. Alrededor de una circunferencia está circunscrito un trapecio isósceles con el lado igual a l, siendo una de las bases de éste igual a a. Hallar el área del trapecio.

I.38. Dos rectas paralelas a las bases de un trapecio dividen cada uno de sus lados en

tres partes iguales. Todo el trapecio se encuentra dividido por aquéllas en tres partes. Hallar el área de la parte media, si las áreas de las partes extremas son S_1 y S_2.

I.39. En el trapecio $ABCD$ $|AB| = a$, $|BC| = b$ $(a \neq b)$. Determinar si la bisectriz del ángulo A corta la base BC o el lado CD.

I.40. Hallar la longitud del segmento de una recta paralela a las bases de un trapecio, la cual pasa por el punto de intersección de las diagonales, si las bases del trapecio son a y b.

I.41. En un trapecio isósceles circunscrito alrededor de una circunferencia la razón de los lados paralelos es igual a k. Hallar el ángulo de la base.

I.42. La base AB del trapecio $ABCD$ es a y la base CD, b. Hallar el área del trapecio, si se sabe que sus diagonales son las bisectrices de los ángulos DAB y ABC.

I.43. La base media de un trapecio isósceles es a y las diagonales son mutuamente perpendiculares. Hallar el área del trapecio.

I.44. El área de un trapecio isósceles circunscrito alrededor de un círculo es igual a S y su altura, dos veces menor que su lado. Determinar el radio del círculo inscrito en el trapecio.

I.45. Las áreas de los triángulos formados por segmentos de las diagonales de un trapecio y sus bases son S_1 y S_2. Hallar el área del trapecio.

I.46. El ángulo ABC del triángulo ABC es igual a α. Hallar el ángulo AOC, donde

O es el centro de la circunferencia inscrita.

I.47. Un triángulo rectángulo tiene trazada la bisectriz del ángulo recto. Hallar la distancia entre los puntos de intersección de las alturas de los dos triángulos formados, si los catetos del triángulo dado son a y b.

I.48. Una recta perpendicular a dos lados de un paralelogramo divide éste en dos trapecios, en cada uno de los cuales se puede inscribir una circunferencia. Hallar el ángulo agudo del paralelogramo, si sus lados son iguales a a y b $(a < b)$.

I.49. Se da un semicírculo, cuyo diámetro es AB. Por el punto medio de la semicircunferencia se trazan dos rectas que dividen el semicírculo en tres partes de áreas equivalentes. ¿En qué razón dividen estas rectas el diámetro AB?

I.50. Se da el cuadrado $ABCD$, cuyo lado es a, y están construidas dos circunferencias. La primera circunferencia se encuentra totalmente en el interior del cuadrado $ABCD$ y es tangente al lado AB en E, así como con el lado BC y la diagonal AC. La segunda circunferencia con su centro en el punto A pasa por el punto E. Hallar el área de la parte común de los dos círculos limitados por estas circunferencias.

I.51. Los vértices de un hexágono regular con el lado a son los centros de circunferencias, cuyos radios son iguales a $a/\sqrt{2}$. Hallar el área de la parte del hexágono dispuesta fuera de estas circunferencias.

I.52. Fuera de una circunferencia de radio R se toma el punto A, desde el cual están trazadas dos secantes: una de éstas pasa por el centro, mientras que la otra pasa a una distancia $R/2$ del mismo. Hallar el área de la parte del círculo dispuesta entre estas secantes.

I.53. En el cuadrilátero $ABCD$ se conocen los ángulos: $\angle DAB = 90°$, $\angle DBC = 90°$. Además, $|DB| = a$, $|DC| = b$. Hallar la distancia entre los centros de dos circunferencias, una de las cuales pasa por los puntos D, A y B y la otra, por los puntos B, C y D.

I.54. En los lados AB y AD del rombo $ABCD$ se eligen dos puntos M y N de manera que las rectas MC y NC dividen el rombo en tres partes de áreas iguales. Hallar $|MN|$, si $|BD| = d$.

I.55. En el lado AB del triángulo ABC se toman dos puntos M y N de manera que $|AM| : |MN| : |NB| = 1:2:3$. Por los puntos M y N están trazadas rectas paralelas al lado AC. Hallar el área de la parte del triángulo comprendida entre estas rectas, si el área del triángulo ABC es igual a S.

I.56. Se da una circunferencia y un punto A fuera de ésta. AB y AC son tangentes a la circunferencia (B y C son los puntos de tangencia). Demostrar que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC se halla en la circunferencia dada.

I.57. El triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia y en el arco BC se toma un punto arbitrario M. Demostrar que $|AM| = |BM| + |CM|$.

I.58. Sea H el punto de intersección de las alturas del $\triangle ABC$. Hallar los ángulos del $\triangle ABC$, si $\angle BAH = \alpha$ y $\angle ABH = \beta$.

I.59. El área de un rombo es S; la suma de sus diagonales, m. Hallar el lado del rombo.

I.60. Un cuadrado de lado a está inscrito en una circunferencia. Hallar el lado del cuadrado inscrito en uno de los segmentos obtenidos.

I.61. En un segmento con un arco de 120° y una altura h está inscrito el rectángulo $ABCD$ de manera que $|AB| : |BC| = 1:4$ (BC se halla sobre la cuerda). Encontrar el área del rectángulo.

I.62. El área de un anillo circular es igual a S. El radio de la circunferencia mayor es igual a la longitud de la menor. Hallar el radio de la circunferencia menor.

I.63. Expresar el lado de un decágono regular a través de R que es el radio de la circunferencia circunscrita.

I.64. Hacia una circunferencia de radio R desde el punto exterior M están trazadas las tangentes MA y MB que forman el ángulo α. Determinar el área de la figura limitada por las tangentes y el arco menor de la circunferencia.

I.65. Viene dado el cuadrado $ABCD$ de lado a. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por el punto medio del lado AB, el centro del cuadrado y el vértice C.

I.66. Se da un rombo con el lado a y el ángulo agudo α. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por dos vértices vecinos del

rombo y toca el lado opuesto del rombo o su prolongación.

I.67. Se dan tres circunferencias de radio r que se rozan de dos en dos. Hallar el área del triángulo formado por tres rectas, cada una de las cuales es tangente a dos circunferencias y no corta la tercera.

I.68. Cierta recta tiene un punto de tangencia en M con una circunferencia de radio r. En esta recta, a ambos lados del punto M se toman los puntos A y B de manera que $|MA| = |MB| = a$. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por A y B y se roza con la circunferencia dada.

I.69. Viene dado el cuadrado $ABCD$ cuyo lado es a. En su lado BC se toma el punto M de manera que $|BM| = 3|MC|$ y en el lado CD, el punto N de modo que $2|CN| = |ND|$. Hallar el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo AMN.

I.70. Se da el cuadrado $ABCD$ de lado a. Determinar la distancia entre el punto medio del segmento AM, donde M es el punto medio de BC, y el punto N en el lado CD, que divide éste de tal manera, que $|CN| : |ND| = 3:1$.

I.71. Desde el vértice A del triángulo ABC sale una recta que divide por la mitad la mediana BD (el punto D se halla sobre el lado AC). ¿En qué razón esta recta divide el lado BC?

I.72. El cateto CA del triángulo rectángulo ABC es igual a b, el cateto CB, a a; CH es la altura, AM, la mediana. Hallar el área del triángulo BMH.

I.73. En el triángulo isósceles ABC $\angle A = \alpha > 90°$ y $|BC| = a$. Hallar la distancia entre el punto de intersección de las alturas y el centro de la circunferencia circunscrita.

I.74. Alrededor del triángulo ABC, en el cual $|BC| = a$, $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta$, está circunscrita una circunferencia. La bisectriz del ángulo A corta la circunferencia en el punto K. Hallar $|AK|$.

I.75. En una circunferencia de radio R está trazado el diámetro y sobre éste se toma el punto A a una distancia a de su centro. Hallar el radio de la segunda circunferencia que entra en contacto con el diámetro en el punto A y es tangente por interior a la circunferencia dada.

I.76. Una circunferencia tiene trazadas tres cuerdas que se intersecan dos a dos. Cada cuerda está dividida por los puntos de intersección en tres partes iguales. Hallar el radio de la circunferencia, si una de las cuerdas es igual a a.

I.77. Un hexágono regular está inscrito en una circunferencia, mientras que el otro está circunscrito alrededor de ésta. Hallar el radio de la circunferencia, si la diferencia de los perímetros de estos hexágonos es igual a a.

I.78. En el triángulo regular ABC, cuyo lado es igual a a, está trazada la altura BK. Los triángulos ABK y BCK tienen inscritas sendas circunferencias, a las cuales está trazada la tangente exterior común distinta del lado AC. Hallar el área del triángulo cortado por esta tangente del triángulo ABC.

I.79. Los ángulos del cuadrilátero inscrito $ABCD$ son $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BKC = \gamma$, donde K es el punto de intersección de las diagonales. Hallar $\angle ACD$.

I.80. Las diagonales del cuadrilátero inscrito $ABCD$ se intersecan en el punto K. Se sabe que $|AB| = a$, $|BK| = b$, $|AK| = c$, $|CD| = d$. Hallar $|AC|$.

I.81. Un trapecio está inscrito en una circunferencia. La base del trapecio forma con su lado el ángulo α y con la diagonal, el ángulo β. Hallar la razón entre el área del círculo y la del trapecio.

I.82. La base AD del trapecio isósceles $ABCD$ es igual a a, la base BC es igual a b, $|AB| = d$. La recta trazada por el vértice B divide por la mitad la diagonal AC y corta AD en el punto K. Hallar el área del triángulo BDK.

I.83. Hallar la suma de las distancias al cuadrado desde el punto M, tomado en el diámetro de cierta circunferencia, hasta los extremos de cualquiera de las cuerdas paralelas a este diámetro, si el radio de la circunferencia es igual a R y la distancia desde M hasta el centro de la circunferencia es igual a a.

I.84. Una cuerda común a dos circunferencias que se intersecan, se ve desde sus centros bajo los ángulos de 90° y 60°. Hallar los radios de las circunferencias, si la distancia entre sus centros es igual a a.

I.85. Viene dado el triángulo regular ABC. El punto K divide su lado AC en razón de 2:1 y el punto M divide el lado AB en razón de 1:2 (contando en ambos casos desde el vér-

tice A). Demostrar que la longitud del segmento KM es igual al radio de la circunferencia descrita alrededor del triángulo ABC.

I.86. Dos circunferencias con radios R y $R/2$ tienen un contacto exterior. Uno de los extremos de un segmento de longitud $2R$ forma con la línea de centros un ángulo igual a $30°$ y coincide con el centro de la circunferencia de radio menor. ¿Qué parte del segmento se halla fuera de ambas circunferencias? (El segmento corta ambas circunferencias.)

I.87. El triángulo ABC tiene trazadas la mediana BK, la bisectriz BE y la altura AD. Hallar la longitud del lado AC, si se sabe que las rectas BK y BE dividen el segmento AD en tres partes iguales y $|AB| = 4$.

I.88. La relación entre el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo isósceles y el radio de la circunferencia circunscrita alrededor de este mismo triángulo es igual a k. Hallar el ángulo contiguo a la base del triángulo.

I.89. Hallar el coseno del ángulo contiguo a la base del triángulo isósceles, si el punto de intersección de sus alturas se halla en la circunferencia inscrita en el triángulo.

I.90. Hallar el área de un pentágono limitado por las rectas BC, CD, AN, AM y BD, donde A, B y D son tres vértices del cuadrado $ABCD$, N es el punto medio del lado BC y M divide el lado CD en razón de 2:1 (calculando a partir del vértice C), si el lado del cuadrado $ABCD$ es a.

I.91. En el triángulo ABC se dan: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Una circunferencia con el

centro en B pasa por A y corta la recta AC en el punto K distinto de A, y la recta BC, en los puntos E y F. Hallar los ángulos del triángulo EKF.

I.92. Viene dado un cuadrado con el lado a. Hallar el área de un triángulo regular, uno de cuyos vértices coincide con el punto medio de uno de los lados del cuadrado y los otros dos se encuentran en las diagonales del cuadrado.

I.93. En los lados del cuadrado $ABCD$ se toman los puntos M, N y K, donde M es el punto medio del lado AB, N se halla en el lado BC, además, $2\,|BN| = |NC|$, K pertenece al lado DA, con la particularidad de que $2\,|DK| = |KA|$. Hallar el seno del ángulo comprendido entre las rectas MC y NK.

I.94. Por los vértices A y B del triángulo ABC pasa una circunferencia de radio r que corta el lado BC en el punto D. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, D y C, si $|AB| = c$ y $|AC| = b$.

I.95. El lado AB del triángulo ABC es igual a 3 y la altura CD bajada sobre el lado AB es igual a $\sqrt{3}$. La base D de la altura CD se encuentra sobre el lado AB, el segmento AD es igual al lado BC. Hallar $|AC|$.

I.96. En una circunferencia de radio R está inscrito el hexágono regular $ABCDEF$. Hallar el radio del círculo inscrito en el triángulo ACD.

I.97. El lado AB del cuadrado $ABCD$ es igual a 1 y es la cuerda de cierta circun-

ferencia, estando los otros lados del cuadrado fuera de esta circunferencia. La longitud de la tangente CK trazada desde el vértice C a la misma circunferencia es igual a 2. ¿A qué es igual el diámetro de la circunferencia?

I.98. En un triángulo rectángulo el ángulo menor es α. Una recta que divide el triángulo en dos partes de áreas iguales, está trazada perpendicularmente a la hipotenusa. Determinar en qué razón esta recta divide la hipotenusa.

I.99. En el interior de un triángulo regular de lado igual a 1 se encuentran dos circunferencias que contactan entre sí y cada una de éstas es tangente a dos lados del triángulo (cada lado del triángulo es tangente por lo menos a una circunferencia). Demostrar que la suma de los radios de estas circunferencias no es menor de $(\sqrt{3} - 1)/2$.

I.100. El triángulo rectángulo ABC con el ángulo agudo A igual a 30° tiene trazada la bisectriz BD del otro ángulo agudo. Hallar la distancia entre los centros de dos circunferencias inscritas en los triángulos ABD y CBD, si el cateto menor es igual a 1.

I.101. Los ángulos A y D del trapecio $ABCD$, contiguos a la base AD son de 60° y 30°, respectivamente. El punto N pertenece a la base BC, con la particularidad de que $|BN| : |NC| = 2$. El punto M se halla sobre la base AD, la recta MN es perpendicular a las bases del trapecio y divide su área en dos partes iguales. Hallar $|AM| : |MD|$.

I.102. En el triángulo ABC se dan $|BC| =$

$= a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Hallar el radio de la circunferencia que tiene contacto con el lado BC, y a la que es tangente el lado AC en el punto A.

I.103. En el triángulo ABC $|AB| = c$, $|BC| = a$, $\angle B = \beta$. Sobre el lado AB se toma el punto M de manera que $2|AM| = 3|MB|$. Hallar la distancia desde M hasta el punto medio del lado AC.

I.104. En el lado AB del triángulo ABC se toma el punto M y en el lado AC, el punto N, con la particularidad de que $|AM| = 3|MB|$ y $2|AN| = |NC|$. Hallar el área del cuadrilátero $MBCN$, si la del triángulo ABC es igual a S.

I.105. Se dan dos circunferencias concéntricas con los radios R y r $(R > r)$ y el centro común O. La tercera circunferencia es tangente a las dos primeras. Hallar la tangente del ángulo comprendido entre las tangentes que parten del punto O, hacia la tercera circunferencia.

I.106. En el paralelogramo $ABCD$ $|AB| = a$, $|AD| = b$ $(b > a)$ y $\angle BAD = \alpha$ $(\alpha < 90°)$. Los puntos K y M en los lados AD y BC se toman de manera que $BKDM$ sea un rombo. Hallar el lado del rombo.

I.107. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a c. Los centros de tres circunferencias de radio $c/5$ se encuentran en sus vértices. Hallar el radio de una cuarta circunferencia tangente a las tres dadas que no las contiene en su interior.

I.108. Hallar el radio de una circunferencia que en ambos lados del ángulo de magnitud α

corta las cuerdas de longitud a, si se sabe que la distancia entre los extremos más próximos de estas cuerdas es igual a b.

I.109. Sobre el lado BC del triángulo ABC, como sobre el diámetro, está construida una circunferencia que corta los lados AB y AC en los puntos M y N. Hallar el área del triángulo AMN, si la del triángulo ABC es igual a S y $\angle BAC = \alpha$.

I.110. En una circunferencia de radio R están trazadas dos cuerdas mutuamente perpendiculares MN y PQ. Hallar la distancia entre los puntos M y P, si $|NQ| = a$.

I.111. Sobre el lado más grande BC del triángulo ABC, igual a b, se elige el punto M. Hallar la distancia mínima entre los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos BAM y ACM.

I.112. En el paralelogramo $ABCD$ $|AB| = a$, $|BC| = b$, $\angle ABC = \alpha$. Hallar la distancia entre los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos BCD y DAB.

I.113. En el triángulo ABC $\angle A = \alpha$, $|BA| = a$, $|AC| = b$. En los lados AC y AB se toman los puntos M y N, donde M es el punto medio de AC. Hallar la longitud del segmento MN, si se sabe que el área del triángulo AMN representa 1/3 parte de la del triángulo ABC.

I.114. Hallar los ángulos de un rombo, si el área del círculo inscrito en él es dos veces menor que la del rombo.

I.115. Hallar el área de la parte común de dos cuadrados, si cada uno de ellos tiene

el lado igual a a y el segundo se obtiene girando el primero alrededor del vértice a un ángulo de 45°.

I.116. Los dos lados opuestos de un cuadrilátero inscrito en un círculo son mutuamente perpendiculares y uno de ellos es igual a a; el ángulo agudo adyacente a éste se divide por la diagonal en las partes α y β. Determinar las diagonales (el ángulo α es contiguo al lado dado).

I.117. El paralelogramo $ABCD$ tiene el ángulo agudo DAB igual a α, $|AB| = a$, $|AD| = b$ $(a < b)$. Supongamos que K es la base de la perpendicular bajada desde el vértice B sobre AD, y M es el pie de la perpendicular bajada desde el punto K sobre la prolongación del lado CD. Hallar el área del triángulo BKM.

I.118. En el triángulo ABC desde el vértice C están trazados dos rayos que dividen el ángulo ACB en tres partes iguales. Hallar la relación entre los segmentos de los rayos comprendidos dentro del triángulo, si $|BC| = 3|AC|$, $\angle ACB = \alpha$.

I.119. En el triángulo isósceles ABC $(|AB| = |BC|)$ está trazada la bisectriz AD. Las áreas de los triángulos ABD y ADC son iguales a S_1 y S_2, respectivamente. Hallar $|AC|$.

I.120. Una circunferencia de radio R_1 está inscrita en un ángulo de magnitud α. Otra circunferencia de radio R_2 entra en contacto con uno de los lados del ángulo en el mismo punto que la primera y corta el

segundo lado del ángulo en los puntos A y B. Hallar $|AB|$.

1.121. En una recta que pasa por el centro O de una circunferencia de radio 12, se toman los puntos A y B de manera que $|OA| = 15$, $|AB| = 5$. Desde los puntos A y B están trazadas tangentes a la circunferencia, cuyos puntos de tangencia se hallan a un mismo lado de la recta OAB. Encontrar el área del triángulo ABC, si C es el punto de intersección de estas tangentes.

1.122. En el triángulo ABC se conocen $|BC| = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Hallar el radio de la circunferencia que corta todos sus lados, formando en cada uno de ellos cuerdas de longitud d.

1.123. Los segmentos que unen los centros de los lados opuestos de un cuadrilátero convexo, son iguales a a y b y se intersecan formando un ángulo de 60°. Hallar las diagonales del cuadrilátero.

1.124. En el lado BC del triángulo ABC se toma el punto M de manera que la distancia desde el vértice B hasta el centro de masas del triángulo AMC es igual a la distancia desde el vértice C hasta el centro de masas del triángulo AMB. Demostrar que $|BM| = |DC|$, donde D es la base de la altura bajada sobre BC desde el vértice A.

1.125. La bisectriz BE del ángulo recto B del triángulo rectángulo ABC se divide por el centro O de la circunferencia inscrita de manera que $|BO| : |OE| = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Hallar los ángulos agudos del triángulo.

I.126. En el segmento AB de longitud R está construida como sobre su diámetro una circunferencia. Una segunda circunferencia del mismo radio que la primera, tiene el centro en el punto A. Una tercera tiene contacto interior con la primera circunferencia y contacto exterior con la segunda; el segmento AB es tangente a esta tercera circunferencia. Hallar el radio de la tercera circunferencia.

I.127. Se da el triángulo ABC. Se sabe que $|AB| = 4$, $|AC| = 2$, $|BC| = 3$. La bisectriz del ángulo A corta el lado BC en el punto K. La recta que pasa por el punto B paralelamente a AC corta la prolongación de la bisectriz AK en el punto M. Hallar $|KM|$.

I.128. Una circunferencia con el centro dispuesto en el interior del ángulo recto, es tangente a un lado del ángulo, corta el otro lado en los puntos A y B e interseca la bisectriz del ángulo en los puntos C y D. La cuerda AB es igual a $\sqrt{6}$, la cuerda CD es igual a $\sqrt{7}$. Hallar el radio de la circunferencia.

I.129. En un paralelogramo hay dos circunferencias de radio 1, que entran en contacto entre sí y con tres lados del paralelogramo cada una. Se sabe también que el segmento de uno de los lados del paralelogramo entre el vértice y el punto de tangencia es igual a $\sqrt{3}$. Hallar el área del paralelogramo.

I.130. Una circunferencia de radio R pasa por los vértices A y B del triángulo ABC. La recta AC es tangente a dicha circunferencia en el punto A. Hallar el área del triángulo ABC, si se sabe que $\angle B = \alpha$, $\angle A = \beta$.

I.131. La bisectriz AK del triángulo ABC es perpendicular a la mediana BM y el ángulo B es igual a 120°. Hallar la razón entre el área del triángulo ABC y la del círculo circunscrito alrededor de este triángulo.

I.132. Por los centros de los lados AB y AC del triángulo rectángulo ABC está trazada una circunferencia, a la cual es tangente el lado BC Hallar la parte de la hipotenusa AC que se encuentra en el interior de esta circunferencia, si $|AB| = 3$, $|BC| = 4$.

I.133. Viene dado el segmento a. Tres circunferencias de radio R tienen los centros en los extremos y en el punto medio del segmento a. Hallar el radio de una cuarta circunferencia que es tangente a las tres circunferencias dadas.

I.134. Hallar el ángulo entre una tangente exterior común y una tangente interior común a dos circunferencias, si sus radios son R y r y la distancia entre sus centros es igual a $\sqrt{2(R^2 + r^2)}$ (los centros de las circunferencias se encuentran a un mismo lado de la tangente exterior común y a diferentes lados de la tangente interior común).

I.135. El segmento AB es el diámetro de un círculo y el punto C se encuentra fuera de él. Los segmentos AC y BC se intersecan con la circunferencia en los puntos D y E, respectivamente. Hallar el ángulo CBD, si las áreas de los triángulos DCE y ABC se relacionan como 1:4.

I.136. El ángulo en el vértice A del rombo $ABCD$ de lado a es igual a 120°. Los puntos E

y F pertenecen a los lados BC y AD, respectivamente, el segmento EF y la diagonal del rombo AC se intersecan en el punto M. Las áreas de los cuadriláteros $BEFA$ y $ECDF$ se relacionan como 1:2. Hallar $|EM|$, si $|AM| : |MC| = 1:3$.

I.137. Una circunferencia de radio R tiene su centro en el punto O. Desde el extremo del segmento OA que interseca la circunferencia en el punto M, está trazada la tangente a la circunferencia AK. Hallar el radio de la circunferencia que roza el arco MK, y a la cual son tangentes los segmentos AK, AM si $\angle OAK = 60°$.

I.138. El triángulo isósceles ABC está inscrito en un círculo. $|AB| = |BC|$ y $\angle B = \beta$. La línea media del triángulo se prolonga hasta la intersección con la circunferencia en los puntos D y E $(DE \parallel AC)$. Hallar la razón entre las áreas de los triángulos ABC y DBE.

I.139. El ángulo α tiene su vértice en el punto O. En uno de sus lados se toma el punto M, del cual se levanta una perpendicular hasta la intersección con el otro lado en el punto N. Precisamente de la misma manera del punto K en el otro lado se levanta una perpendicular hasta la intersección con el primer lado en el punto P. B es el punto de intersección de las rectas MN y KP, y A, el punto de intersección de las rectas OB y NP. Hallar $|OA|$, si $|OM| = a$, $|OP| = b$.

I.140. Dos circunferencias de radios R y r tienen contacto con los lados de un ángulo dado y entre sí. Hallar el radio de una tercera

circunferencia, a la cual son tangentes los lados del mismo ángulo, y cuyo centro se encuentra en el punto de tangencia de las circunferencias dadas.

I.141. La distancia entre los centros de dos circunferencias que no se intersecan, es igual a a. Demostrar que los cuatro puntos de intersección de las tangentes exteriores comunes con las tangentes interiores comunes se encuentran en una misma circunferencia. Hallar el radio de esta circunferencia.

I.142. Demostrar que el segmento de una tangente exterior común a dos circunferencias, comprendido entre las tangentes interiores comunes, es igual a la longitud de la tangente interior común.

I.143. Un círculo con el centro en O tiene dos radios OA y OB mutuamente perpendiculares, C es un punto del arco AB, en el cual $\angle AOC = 60°$ ($\angle BOC = 30°$). Una circunferencia con el centro en A y de radio AB corta la prolongación de OC más allá del punto C en el punto D. Demostrar que el segmento CD es igual al lado del decaedro regular inscrito en la circunferencia.

Tomemos ahora el punto M diametralmente opuesto al punto C. El segmento MD aumentado en una quinta parte de su longitud se considera aproximadamente igual a la semicircunferencia. Estimar el error de esta igualdad aproximada.

I.144. Un rectángulo tiene los lados 7 y 8. Un vértice de un triángulo regular coincide con el del rectángulo y los otros dos se encuentran en sus lados que no contienen el pri-

mer vértice. Hallar el lado del triángulo regular.

I.145. Hallar el radio de la circunferencia mínima en la que está inscrito un trapecio isósceles, cuyas bases son de 15 y 4 y los lados, de 9.

I.146. $ABCD$ es un rectángulo, en el cual $|AB| = 9$, $|BC| = 7$. En el lado CD se elige el punto M de manera que $|CM| = 3$, y en el lado AD, el punto N de manera que $|AN| = 2{,}5$. Hallar el radio de la circunferencia máxima que se inscriba en el pentágono $ABCMN$.

I.147. Hallar el ángulo máximo del triángulo, si se sabe que el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo con vértices ubicados en los pies de las alturas del triángulo dado, es dos veces menor que la altura mínima del triángulo dado.

I.148. En el triángulo ABC, la bisectriz del ángulo C es perpendicular a la mediana trazada desde el vértice B. El centro de la circunferencia inscrita se encuentra en la circunferencia que pasa por los puntos A, C y el centro de la circunferencia circunscrita. Hallar $|AB|$, si $|BC| = 1$.

I.149. El punto M está alejado de los lados de un triángulo regular (de las rectas a las cuales pertenecen sus lados) a las distancias 2, 3 y 6. Hallar el lado del triángulo regular, si se sabe que su área es menor de 14.

I.150. El punto M se encuentra alejado de los lados del ángulo de 60° a las distancias $\sqrt{3}$ y $3\sqrt{3}$ (los pies de las perpendiculares

bajadas desde el M sobre los lados del ángulo se encuentran en los lados y no en sus prolongaciones). La recta que pasa por M, interseca los lados del ángulo y corta un triángulo con un perímetro igual a 12. Hallar el área de este triángulo.

I.151. En el rectángulo $ABCD$ $|AB| = 4$, $|BC| = 3$. Hallar el lado del rombo, uno de cuyos vértices coincide con A, y los otros tres se encuentran en los segmentos AB, BC y BD, respectivamente.

I.152. El lado del cuadrado $ABCD$ es igual a 1. Hallar el lado del rombo, uno de cuyos vértices coincide con A, el opuesto se encuentra sobre la recta BD y los dos restantes, sobre las rectas BC y CD.

I.153. El ángulo agudo del paralelogramo $ABCD$ es igual a α. Una circunferencia de radio r pasa por los vértices A, B y C y corta las rectas AD y CD en los puntos M y N. Hallar el área del triángulo BMN.

I.154. La circunferencia que pasa por los vértices A, B y C del paralelogramo $ABCD$ corta las rectas AD y CD en los puntos M y N. El punto M está alejado de los vértices B, C y D a las distancias 4, 3 y 2, respectivamente. Hallar $|MN|$.

I.155. En el triángulo ABC $\angle BAC = \pi/6$. Una circunferencia con el centro en A y el radio igual a la altura bajada sobre BC, divide el área del triángulo por la mitad. Hallar el ángulo máximo del triángulo ABC.

I.156. En el triángulo isósceles ABC $\angle B = 120°$. Hallar la cuerda común de la circunferencia circunscrita alrededor del tri-

ángulo ABC, y de la circunferencia que pasa por el centro del círculo inscrito y los pies de las bisectrices de los ángulos A y C, si $|AC| = 1$.

I.157. El lado BC del triángulo ABC es igual a a, el radio de la circunferencia inscrita es igual a r. Determinar los radios de dos circunferencias iguales que son tangentes una a otra; además, una de éstas entra en contacto con los lados BC y BA, mientras que los lados BC y CA son tangentes a la otra.

I.158. Una circunferencia de radio R tiene inscrito un trapecio. Las rectas que pasan por los extremos de una de las bases paralelamente a los lados, se intersecan en el centro de la circunferencia. El lado se ve desde el centro bajo un ángulo α. Hallar el área del trapecio.

I.159. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a c. ¿Dentro de qué límites puede cambiar la distancia desde el centro del círculo inscrito hasta el punto de intersección de las medianas?

I.160. Los lados de un paralelogramo son iguales a a y b ($a \neq b$). ¿Dentro de qué límites puede variar el coseno del ángulo agudo entre las diagonales?

I.161. Por el punto M en el interior del triángulo ABC pasan tres rectas paralelas a los lados del triángulo. Los segmentos de rectas comprendidos en el interior del triángulo son iguales entre sí. Hallar las longitudes de estos segmentos, si los lados del triángulo son a, b y c.

I.162. En el triángulo ABC se encuentran tres circunferencias iguales, cada una de las

cuales es tangente a dos lados del triángulo. Las tres circunferencias tienen un punto común. Hallar los radios de estas circunferencias, si los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita del triángulo ABC son iguales a r y R.

I.163. La mediana del triángulo ABC es AD, $\angle DAC + \angle ABC = 90°$. Hallar $\angle BAC$, si se sabe que $|AB| \neq |AC|$.

I.164. Tres circunferencias de radios 1, 2 y 3 entran en contacto entre sí exteriormente. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por los puntos de tangencia de estas circunferencias.

I.165. Un triángulo isósceles tiene inscrito un cuadrado de área unitaria, cuyo lado se encuentra sobre la base del triángulo. Hallar el área del triángulo, si se sabe que los centros de masas del triángulo y del cuadrado coinciden.

I.166. El lado del triángulo equilátero ABC es igual a a. Sobre el lado BC se halla el punto D y sobre el AB se encuentra el punto E de manera que $|BD| = a/3$, $|AE| = |DE|$. Hallar $|CE|$.

I.167. En el triángulo rectángulo ABC desde el vértice del ángulo recto C están trazadas la bisectriz CL ($|CL| = a$) y la mediana CM ($|CM| = b$). Hallar el área del triángulo ABC.

I.168. Una circunferencia está inscrita en un trapecio. Hallar el área del trapecio, si se conocen la longitud a de una de las bases y los segmentos b y d, en los cuales se encuentra dividido por el punto de tangencia uno de los

lados (el segmento b es adyacente a la base dada a).

I.169. Las diagonales de un trapecio son iguales a 3 y 5 y el segmento, que une los puntos medios de las bases, es igual a 2. Hallar el área del trapecio.

I.170. Una circunferencia de radio 1 está inscrita en el triángulo ABC, en el cual $\cos B = 0,8$. Esta circunferencia entra en contacto con la línea media del triángulo ABC, paralela al lado AC. Hallar la longitud del lado AC.

I.171. El área del triángulo regular ABC es igual a S. Paralelas a sus lados y a una distancia igual de éstos están trazadas tres rectas que se intersecan en el interior del triángulo y forman en la intersección el triángulo $A_1B_1C_1$ de área Q. Hallar la distancia entre los lados paralelos de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$.

I.172. Los lados AB y CD del cuadrilátero $ABCD$ son perpendiculares y representan los diámetros de dos circunferencias iguales de radio r que entran en contacto. Encontrar el área del cuadrilátero $ABCD$, si $|BC| : |AD| = k$.

I.173. Un ángulo, cuya magnitud es α, tiene inscritas dos circunferencias que entran en contacto entre sí. Determinar la razón entre el radio de la circunferencia menor y el de la tercera circunferencia, tangente a las dos primeras y uno de los lados del ángulo.

I.174. En el triángulo ABC sobre la línea media DE que es paralela a AB, como sobre el diámetro, está construida una circunferencia que corta los lados AC y BC en los puntos M

y N. Hallar $| MN |$, si $| BC | = a$, $| AC | = b$, $| AB | = c$.

I.175. La distancia entre los centros de dos circunferencias es igual a a. Hallar el lado del rombo, cuyos dos vértices opuestos pertenecen a una circunferencia y los dos restantes, a la otra, si los radios de estas circunferencias son iguales a R y r.

I.176. Hallar el área del rombo $ABCD$, si los radios de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos ABC y ABD son iguales a R y r.

I.177. Se da un ángulo de magnitud α con el vértice en A, y el punto B a las distancias a y b de los lados del ángulo. Hallar $| AB |$.

I.178. Las alturas h_a y h_b del triángulo ABC están bajadas desde los vértices A y B; l es la longitud de la bisectriz del ángulo C. Hallar $\angle C$.

I.179. Alrededor de un triángulo rectángulo está circunscrita una circunferencia. Otra del mismo radio entra en contacto con los catetos de este triángulo: además, uno de los puntos de tangencia es el vértice del triángulo. Hallar la razón entre el área del triángulo y la de la parte común de los dos círculos dados.

I.180. En el trapecio $ABCD$ $| AB | = | BC | = | CD | = a$, $| DA | = 2a$. En las rectas AB y AD se toman los puntos E y F, distintos de los vértices del trapecio, de manera que el punto de intersección de las alturas del triángulo CEF coincida con el punto de intersección de las diagonales del trapecio $ABCD$. Hallar el área del triángulo CEF.

* * *

I.181. La altura del triángulo rectángulo ABC, bajada sobre la hipotenusa AB, es igual a h, D es la base de la altura, M y N, los puntos medios de los segmentos AD y DB. Hallar la distancia desde el vértice C hasta el punto de intersección de las alturas del triángulo CMN.

I.182. $ABCD$ es un trapecio isósceles con las bases AD y BC; $|AB| = |CD| = a$, $|AC| = |BD| = b$, $|BC| = c$, M es un punto arbitrario del arco BC de la circunferencia circunscrita alrededor de $ABCD$. Hallar la razón $\frac{|BM| + |MC|}{|AM| + |MD|}$.

I.183. Los lados de un triángulo isósceles son iguales a 1, la base es a. El triángulo está inscrito en una circunferencia. Hallar la cuerda que corta los lados del triángulo y se divide por los puntos de intersección en tres segmentos iguales.

I.184. MN es el diámetro de una circunferencia, $|MN| = 1$, A y B son puntos de circunferencia dispuestos a un lado de MN, C se encuentra en la otra semicircunferencia. A es el punto medio de la semicircunferencia. $|MB| = 3/5$, la longitud del segmento formado por la intersección del diámetro MN con las cuerdas AC y BC es a. ¿A qué es igual la magnitud máxima de a?

I.185. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo, M, el punto medio de AB, N, el punto medio de CD. Las áreas de los triángulos ABN y CDM son iguales y el área de su parte común

es k veces menor que la de cada uno de éstos. Hallar la relación entre los lados BC y AD.

I.186. $ABCD$ es un trapecio isósceles ($AD \parallel BC$), en el cual el ángulo agudo de la base mayor es igual a 60° y la diagonal es igual a $\sqrt{3}$. El punto M está alejado de los vértices A y D a las distancias 1 y 3, respectivamente. Hallar $|MC|$.

I.187. La bisectriz de cada uno de los ángulos de un triángulo corta el lado opuesto en un punto equidistante de los puntos medios de los otros dos lados del triángulo. ¿Se deduce de esto que el triángulo es regular?

I.188. Dos lados de un triángulo son iguales a a y b ($a > b$). Hallar el tercer lado, si se sabe que $a + h_a \leqslant b + h_b$, donde h_a y h_b son las alturas bajadas sobre los lados correspondientes.

I.189. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo circunscrito alrededor de una circunferencia de diámetro 1. En el interior del cuadrilátero $ABCD$ existe un punto M tal, que $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2 = 2$. Hallar el área del cuadrilátero $ABCD$.

I.190. $ABCD$ es un cuadrilátero: $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$; $a^2 + c^2 \neq b^2 + d^2$, $c \neq d$, M es un punto de la recta BD, equidistante de A y C. Hallar la relación $|BM| : |MD|$.

I.191. El lado menor del rectángulo $ABCD$ es igual a 1. Examinemos cuatro circunferencias concéntricas con el centro en A que pasan por B, C, D, respectivamente, y el punto de intersección de las diagonales del rectángulo

$ABCD$. Se sabe que existe un rectángulo con vértices dispuestos en las circunferencias trazadas (un vértice en cada una). Demostrar que existe un cuadrado con vértices en las circunferencias trazadas. Hallar el lado de este cuadrado.

I.192. Se da el triángulo ABC. Las perpendiculares levantadas hacia AB y BC en sus puntos medios, cortan la recta AC en los puntos M y N de manera que $|MN| = |AC|$. Las perpendiculares trazadas a AB y AC en sus puntos medios cortan BC en los puntos K y L de manera que $|KL| = \frac{1}{2}|BC|$. Hallar el ángulo mínimo del triángulo ABC.

I.193. En el lado AB del triángulo ABC se toma un punto M de tal manera que la recta que une el centro de la circunferencia circunscrita alrededor de ABC con el punto de intersección de las medianas del triángulo BCM, es perpendicular a CM. Hallar la relación $|BM| : |BA|$, si $|BC| : |BA| = k$.

I.194. En el cuadrilátero inscrito $ABCD$, en el que $|AB| = |BC|$, K es el punto de intersección de las diagonales. Hallar $|AB|$, si $|BK| = b$, $|DK| = d$.

I.195. Interpretar geométricamente la ecuación 1 y los sistemas 2, 3 y 4. Solucionar la ecuación 1 y los sistemas 2 y 3. En el sistema 4 hallar $x + y + z$:

$$1)\ \sqrt{x^2 + a^2 - ax\sqrt{3}} + \sqrt{y^2 + b^2 - by\sqrt{3}} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}} = \sqrt{a^2 + b^2}\quad (a > 0,\ b > 0).$$

2) $\begin{cases} x = \sqrt{z^2 - a^2} + \sqrt{y^2 - a^2}, \\ y = \sqrt{x^2 - b^2} + \sqrt{z^2 - b^2}, \\ z = \sqrt{y^2 - c^2} + \sqrt{x^2 - c^2}. \end{cases}$

3) $x^2 + y^2 = (a - x)^2 + b^2 = a^2 + (b - y)^2$

4) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2, \\ y^2 + yz + z^2 = b^2, \\ z^2 + zx + x^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$

I.196. El lado de un cuadrado es igual a a, los productos de las distancias desde los vértices opuestos hasta la recta l son iguales entre sí. Hallar la distancia desde el centro del cuadrado hasta la recta l, si se sabe que ninguno de los lados del cuadrado es paralelo a l.

I.197. Uno de los lados del triángulo ABC es dos veces mayor que otro, además, $\angle B = 2\angle C$. Hallar los ángulos del triángulo.

I.198. Los lados iguales AB y AC del triángulo isósceles ABC son tangentes a una circunferencia. Supongamos que M es el punto de tangencia del lado AB y N, el punto de intersección de la circunferencia con la base BC. Hallar $|AN|$, si $|AM| = a$, $|BM| = b$.

I.199. $ABCD$ es un paralelogramo, en el cual $|AB| = k|BC|$, K y L, puntos de la recta CD (K pertenece al lado CD), y M, un punto de BC, además, AD es la bisectriz del ángulo KAL, AM, la bisectriz del ángulo KAB, $|BM| = a$, $|DL| = b$. Hallar $|AL|$.

I.200. Se da un paralelogramo $ABCD$. La recta que pasa por el vértice C, corta las rectas AB y AD en los puntos K y L. Las áreas de los triángulos KBC y CDL son iguales a p y q. Hallar el área del paralelogramo $ABCD$.

I.201. Se da una circunferencia de radio R y dos puntos A y B dispuestos en ella $|AB| = a$. Dos circunferencias de radios x e y entran en contacto con la dada en los puntos A y B. Hallar: a) el segmento de la tangente exterior común a las dos últimas circunferencias, si ambas tienen contacto (interior o exterior) con la dada de manera igual; b) el segmento de la tangente interior común, si la circunferencia de radio x tiene contacto exterior con la dada y la circunferencia de radio y tiene contacto con la dada interiormente.

I.202. En el triángulo ABC $|AB| = 12$, $|BC| = 13$, $|CA| = 15$. Sobre el lado AC se toma el punto M de manera que los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABM y BCM sean iguales. Hallar la relación $|AM| : |MC|$.

I.203. Los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo son iguales a r y R, respectivamente. Hallar el área de éste, si se sabe que la circunferencia que pasa por los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita y por el punto de intersección de las alturas del triángulo, pasa, por lo menos, por uno de los vértices del triángulo.

I.204. En el rectángulo $ABCD$ $|AB| = 2a$, $|BC| = a\sqrt{2}$. Sobre el lado AB

como sobre el diámetro está construido un semicírculo orientado hacia el exterior. Supongamos que M es un punto arbitrario de la semicircunferencia, que la recta MD corta AB en el punto N, y la recta MC, en el punto L. Hallar $|AL|^2 + |BN|^2$ (*problema de Fermat*).

I.205. Dos circunferencias de radios R y r son tangentes una a otra por interior. Hallar el lado de un triángulo regular, uno de cuyos vértices coincide con el punto de tangencia y los otros dos se encuentran sobre cada una de las circunferencias dadas.

I.206. Dos circunferencias de radios R y r $(R > r)$ tienen contacto exterior en el punto A. Por el punto B tomado en la circunferencia mayor pasa una línea recta tangente a la circunferencia menor en el punto C. Hallar $|BC|$, si $|AB| = a$.

I.207. En el paralelogramo $ABCD$ se encuentran tres circunferencias que entran en contracto entre sí de dos en dos, además, una de éstas también es tangente a los lados AB y BC, la otra, con AB y AD, y la tercera, con BC y AD. Hallar el radio de la tercera circunferencia, si la distancia entre los puntos de tangencia del lado AB es igual a a.

I.208. Las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ se cortan en el punto M y el ángulo entre éstas es igual a α. Sean O_1, O_2, O_3, O_4 los centros de las cuatro circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos ABM, BCM, CDM, DAM, respectivamente. Determinar la relación entre las áreas de los cuadriláteros $ABCD$ y $O_1O_2O_3O_4$.

I.200. Se da un paralelogramo $ABCD$. La recta que pasa por el vértice C, corta las rectas AB y AD en los puntos K y L. Las áreas de los triángulos KBC y CDL son iguales a p y q. Hallar el área del paralelogramo $ABCD$.

I.201. Se da una circunferencia de radio R y dos puntos A y B dispuestos en ella $|AB| = a$. Dos circunferencias de radios x e y entran en contacto con la dada en los puntos A y B. Hallar: a) el segmento de la tangente exterior común a las dos últimas circunferencias, si ambas tienen contacto (interior o exterior) con la dada de manera igual; b) el segmento de la tangente interior común, si la circunferencia de radio x tiene contacto exterior con la dada y la circunferencia de radio y tiene contacto con la dada interiormente.

I.202. En el triángulo ABC $|AB| = 12$, $|BC| = 13$, $|CA| = 15$. Sobre el lado AC se toma el punto M de manera que los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABM y BCM sean iguales. Hallar la relación $|AM| : |MC|$.

I.203. Los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo son iguales a r y R, respectivamente. Hallar el área de éste, si se sabe que la circunferencia que pasa por los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita y por el punto de intersección de las alturas del triángulo, pasa, por lo menos, por uno de los vértices del triángulo.

I.204. En el rectángulo $ABCD$ $|AB| = 2a$, $|BC| = a\sqrt{2}$. Sobre el lado AB

igual a a, el radio del círculo inscrito es r. Hallar el área del triángulo, si el círculo inscrito tiene contacto con la circunferencia construida sobre BC como sobre el diámetro.

I.216. Se da un triángulo regular ABC con el lado a; BD es su altura. Sobre BD está construido el triángulo regular BDC_1 y sobre la altura BD_1 de este triángulo, el tercer triángulo regular BD_1C_2. Hallar el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo CC_1C_2. Demostrar que su centro se encuentra en el lado del triángulo ABC (C_2 se encuentra fuera del triángulo ABC).

I.217. Los lados de un paralelogramo son iguales a a y b ($a \neq b$). Por los vértices de los ángulos obtusos de este paralelogramo se trazaron las rectas perpendiculares a los lados. Estas rectas forman como resultado de la intersección un paralelogramo semejante al de partida. Hallar el coseno del ángulo agudo del paralelogramo dado.

I.218. En el triángulo KLM se trazaron las bisectrices KN y LP que se cortan en el punto Q. El segmento PN tiene una longitud igual a 1 y el vértice M se encuentra sobre la circunferencia que pasa por los puntos N, P, Q. Hallar los lados y los ángulos del triángulo PNQ.

I.219. Sobre la diagonal AC de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se encuentra el centro de una circunferencia de radio r, la cual tiene contacto con los lados AB, AD y BC. En la diagonal BD se encuentra el centro de una circunferencia del mismo radio r que entra en contacto con los lados BC, CD y AD. Hallar

el área del cuadrilátero $ABCD$, sabiendo que las circunferencias indicadas son tangentes entre sí exteriormente.

I.220. El radio de una circunferencia circunscrita alrededor del triángulo acutángulo ABC es igual a 1. Se sabe que en esta circunferencia se encuentra el centro de una circunferencia que pasa por los vértices A, C y el punto de intersección de alturas del triángulo ABC. Hallar $|AC|$.

I.221. En el triángulo ABC se toman los puntos M, N y P; M y N, en los lados AC y BC; P, en el segmento MN, además, $|AM| : |MC| = |CN| : |NB| = |MP| : |PN|$. Hallar el área del triángulo ABC, si las áreas de los triángulos AMP y BNP son iguales a T y Q.

I.222. Se da una circunferencia de radio R y el punto A a la distancia a de su centro ($a > R$). Sea K el punto más próximo a A de la circunferencia. La secante que pasa por A, corta la circunferencia en los puntos M y N. Hallar $|MN|$, si el área del triángulo KMN es igual a S.

I.223. En el triángulo isósceles ABC ($|AB| = |BC|$) por el extremo E de la bisectriz AE se trazó una perpendicular a AE hasta la intersección con la prolongación del lado AC en el punto F (C se encuentra entre A y F). Se sabe que $|AC| = 2m$, $|FC| = m/4$. Hallar el área del triángulo ABC.

I.224. Dos triángulos regulares iguales ABC y CDE con el lado igual a 1 están dispuestos en un plano de tal manera que tienen un solo punto común C y el ángulo BCD es

menos de $\pi/3$. K es el punto medio de AC, L, el punto medio de CE, M, el punto medio de BD. El área del triángulo KLM es igual a $\sqrt{3}/5$. Hallar $|BD|$.

I.225. Desde el punto K dispuesto fuera de la circunferencia, cuyo centro se encuentra en O, están trazadas dos tangentes KM y KN a esta circunferencia (M y N son los puntos de tangencia). En la cuerda MN se toma el punto C ($|MC| < |CN|$). Por el punto C, perpendicularmente al segmento OC, está trazada una recta que corta el segmento NK en el punto B. Se sabe que el radio de la circunferencia es igual a R, $\angle MKN = \alpha$ y $|MC| = b$. Hallar $|CB|$.

I.226. El pentágono $ABCDE$ está inscrito en una circunferencia. Los puntos M, Q, N y P son los pies de las perpendiculares bajadas desde el vértice E, respectivamente, sobre los lados AB, BC, CD (o sobre sus prolongaciones) y la diagonal AD. Se sabe que $|EP| = d$ y la relación entre el área del triángulo MQE y el área del triángulo PNE es igual a k. Hallar $|EM|$.

I.227. Se da un trapecio rectangular. Cierta recta paralela a sus bases lo corta en dos trapecios, en cada uno de los cuales se puede inscribir una circunferencia. Determinar las bases del trapecio de partida, si sus lados son iguales a c y d ($d > c$).

I.228. En los lados KL y MN del trapecio isósceles $KLMN$ se eligen respectivamente los puntos P y Q de tal manera que el segmento PQ resulte paralelo a las bases del trapecio. En cada uno de los trapecios $KPQN$ y $PLMQ$

se puede inscribir una circunferencia, cuyos radios son iguales a R y r, respectivamente. Determinar las bases $|LM|$ y $|KN|$.

I.229. La bisectriz del ángulo A del triángulo ABC corta el lado BC en el punto D. Se sabe que $|AB| - |BD| = a$, $|AC| + |CD| = b$. Hallar $|AD|$.

I.230. Aprovechando el resultado del problema anterior, demostrar que el cuadrado de la bisectriz del triángulo es igual al producto de los lados que la comprenden, menos el producto de los segmentos del tercer lado, en los cuales ésta se encuentra dividida por la bisectriz.

I.231. Se da una circunferencia de diámetro AB. La segunda circunferencia con el centro en A corta la primera circunferencia en los puntos C y D y el diámetro, en el punto E. El punto D no pertenece al arco CE; en éste se toma el punto M distinto de los puntos C y E. El rayo BM corta la primera circunferencia en el punto N. Se sabe que $|CN| = a$, $|DN| = b$. Hallar $|MN|$.

I.232. El ángulo B del triángulo ABC es igual a $\pi/4$, el ángulo C es igual a $\pi/6$. En las medianas BN y CN como sobre un diámetro están construidas las circunferencias que se cortan en los puntos P y Q. La cuerda PQ corta el lado BC en el punto D. Hallar la relación $|BD| : |DC|$.

I.233. Sea AB el diámetro de una circunferencia; O, su centro, $|AB| = 2R$; C, un punto sobre la circunferencia; M, un punto sobre la cuerda AC. Desde M se baja la perpendicular MN al diámetro AB y se levanta

la perpendicular a AC que corta la circunferencia en el punto L (el segmento CL corta AB). Hallar la distancia entre el punto medio de AO y el punto medio de CL, si $|AN| = a$.

I.234. Alrededor del triángulo ABC está circunscrita una circunferencia. Una tangente a la circunferencia, que pasa por el punto B, corta la recta AC en el punto M. Hallar la relación $|AM| : |MC|$, si $|AB| : |BC| = k$.

I.235. En una recta se encuentran sucesivamente los puntos A, B, C y D, además, $|AC| = \alpha |AB|$, $|AD| = \beta |AB|$. Por A y B está trazada una circunferencia arbitraria, CM y DN son dos tangentes a esta circunferencia (M y N son los puntos sobre la circunferencia, ubicados a distintos lados de la recta AB). ¿En qué razón la recta MN divide el segmento AB?

I.236. $ABCD$ es un cuadrilátero circunscrito; los segmentos desde A hasta los puntos de tangencia son iguales a a; los segmentos desde C hasta los puntos de tangencia son iguales a b. ¿En qué razón la diagonal BD divide la diagonal AC?

I.237. El punto K pertenece a la base AD del trapecio $ABCD$, con la particularidad de que $|AK| = \lambda |AD|$. Hallar la razón $|AM| : |MD|$, donde M es el punto de intersección de AD con la recta que pasa por los puntos de intersección de las rectas AB y CD y las rectas BK y AC.

Tomando $\lambda = 1/n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), establecer el método de partición del segmento

dado en n partes iguales sólo con una regla, si se da una recta paralela a éste.

I.238. En el triángulo rectángulo ABC, cuya hipotenusa AB es igual a c, sobre la altura CD como sobre el diámetro está construida una circunferencia. Las tangentes a esta circunferencia que pasan por los puntos A y B entran en contacto con ésta en los puntos M y N y se cortan con su prolongación en el punto K. Hallar $|MK|$.

I.239. En los lados AB, BC y CA del triángulo ABC se toman los puntos C_1, A_1 y B_1 de manera que $|AC_1| : |C_1B| = |BA_1| : : |A_1C| = |CB_1| : |B_1A| = k$. En los lados A_1B_1, B_1C_1 y C_1A_1 se toman los puntos C_2, A_2 y B_2 de manera que $|A_1C_2| : |C_2B_1| = = |B_1A_2| : |A_2C_1| = |C_1B_2| : |B_2A_1| = = 1/k$. Demostrar que el triángulo $A_2B_2C_2$ es semejante al triángulo ABC y hallar la razón de semejanza.

I.240. En el triángulo ABC se dan los radios R y r de las circunferencias circunscrita e inscrita. Sean A_1, B_1, C_1 los puntos de intersección de las bisectrices del triángulo ABC con la circunferencia circunscrita. Hallar la razón entre las áreas de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$.

I.241. Dos triángulos tienen los lados correspondientemente paralelos y sus áreas son S_1 y S_2; además, uno de ellos está inscrito en el triángulo ABC y el otro está circunscrito alrededor del mismo. Hallar el área del triángulo ABC.

I.242. Determinar el ángulo A del triángulo ABC, si se sabe que la bisectriz de

este ángulo es perpendicular a la recta que pasa por el punto de intersección de las alturas y el centro de la circunferencia circunscrita alrededor de este triángulo.

I.243. Hallar los ángulos de un triángulo, si se sabe que la distancia entre el centro de una circunferencia circunscrita y el punto de intersección de las alturas es dos veces menor que el lado máximo y es igual al lado mínimo.

I.244. Se da el triángulo ABC. Tomemos en el rayo BA un punto D de tal manera que $|BD| = |BA| + |AC|$. Sean K y M dos puntos en los rayos BA y BC, respectivamente, tales que el área del triángulo BDM es igual al área del triángulo BCK. Hallar $\angle BKM$, si $\angle BAC = \alpha$.

I.245. En el trapecio $ABCD$ el lado AB es perpendicular a AD y BC; además, $|AB| = \sqrt{|AD| \cdot |BC|}$. Sea E el punto de intersección de los lados no paralelos del trapecio; O, el punto de intersección de las diagonales; M, el punto medio de AB. Hallar $\angle EOM$.

I.246. En un plano se dan dos rectas que se intersecan en el punto O, y dos puntos A y B. Designemos los pies de las perpendiculares bajadas desde A sobre las rectas dadas a través de M y N y los pies de las perpendiculares bajadas desde B, a través de K y L, respectivamente. Hallar el ángulo entre las rectas MN y KL, si $\angle AOB = \alpha \leqslant 90°$.

I.247. Dos circunferencias entran en contacto entre sí interiormente en el punto A. Desde O, que es el centro de la circunferencia mayor, está trazado el rayo OB tangente a la

circunferencia menor en el punto C. Hallar $\angle BAC$.

I.248. En el interior del cuadrado $ABCD$ se toma el punto M de manera que $\angle MAB = 60°$, $\angle MCD = 15°$. Hallar $\angle MBC$.

I.249. En el triángulo ABC se conocen los ángulos: $\angle A = 45°$, $\angle B = 15°$. En la prolongación del lado AC más allá del punto C se toma el punto M de manera que $|CM| = 2|AC|$. Hallar $\angle AMB$.

I.250. En el triángulo ABC, cuyo $\angle B = 60°$, la bisectriz del ángulo A corta BC en el punto M. En el lado AC se toma un punto K de modo que $\angle AMK = 30°$. Hallar $\angle OKC$, donde O es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo AMC.

I.251. En el triángulo ABC $|AB| = |AC|$, $\angle A = 80°$. a) En el interior del triángulo se toma el punto M tal que $\angle MBC = 30°$, $\angle MCB = 10°$. Hallar $\angle AMC$. b) Fuera del triángulo se toma el punto P de manera que $\angle PBC = \angle PCA = 30°$ y el segmento BP corta el lado AC. Hallar $\angle PAC$.

I.252. En el triángulo ABC $\angle B = 100°$, $\angle C = 65°$; sobre AB se toma el punto M de modo que $\angle MCB = 55°$ y sobre AC, el punto N de tal manera que $\angle NBC = 80°$. Hallar $\angle NMC$.

I.253. En el triángulo ABC $|AB| = |BC|$, $\angle B = 20°$; sobre AB se toma el punto M de manera que $\angle MCA = 60°$ y sobre CB, el punto N de modo que $\angle NAC = 50°$. Hallar $\angle NMC$.

I.254. En el triángulo ABC $\angle B = 70°$, $\angle C = 50°$; sobre AB se toma el punto M

de manera que $\angle MCB = 40°$, y sobre AC, el punto N de manera que $\angle NBC = 50°$. Hallar $\angle NMC$.

I.255. Supongamos que M y N son los puntos de tangencia de una circunferencia inscrita con los lados BC y BA del triángulo ABC; K, el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A con la recta MN. Demostrar que $\angle AKC = 90°$.

I.256. Sean P y Q dos puntos diferentes de una circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, tales que $|PA|^2 = |PB| \times |PC|$, $|QA|^2 = |QB| \cdot |QC|$ (uno de los puntos se sitúa sobre el arco AB y el otro, sobre el arco AC). Hallar la diferencia $\angle PAB - \angle QAC$, si la diferencia de los ángulos B y C del triángulo ABC es igual a α.

I.257. En una circunferencia se toman dos puntos fijos A y B, $\smile AB = \alpha$. Una circunferencia arbitraria pasa por los puntos A y B. Por A también está trazada una recta arbitraria l, que corta las circunferencias en los puntos C y D distintos a B (C se encuentra sobre la circunferencia dada). Las tangentes a las circunferencias en los puntos C y D (C y D son los puntos de tangencia) se intersecan en el punto M; N es un punto sobre l tal que $|CN| = |AD|$, $|DN| = |CA|$. ¿Qué valores puede tomar $\angle CMN$?

I.258. Demostrar que si en el triángulo un ángulo es igual a 120°, el triángulo formado por las bases de sus bisectrices es rectángulo.

I.259. En el cuadrilátero $ABCD$ $\angle DAB = 150°$, $\angle DAC + \angle ABD = 120°$, $\angle DBC - \angle ABD = 60°$. Hallar $\angle BDC$.

* * *

I.260. En el triángulo ABC $|AB| = 1$, $|AC| = 2$. Hallar $|BC|$, si se sabe que las bisectrices de los ángulos exteriores A y C son iguales entre sí (se examinan los segmentos a partir del vértice hasta el punto de intersección de la bisectriz correspondiente con la recta, en la cual se encuentra el lado opuesto del triángulo).

I.261. En el lado CB del triángulo ABC se toma el punto D de forma que $|CD| = \alpha |AC|$. El radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC es R. Hallar la distancia entre el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC y el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ADB.

I.262. El triángulo rectángulo ABC ($\angle C = 90°$) tiene una circunferencia circunscrita. Sea CD la altura del triángulo. La circunferencia con el centro en D pasa por el punto medio del arco AB y corta AB en el punto M. Hallar $|CM|$, si $|AB| = c$.

I.263. Hallar el perímetro del triángulo ABC, si $|BC| = a$ y el segmento de la recta tangente al círculo inscrito y paralela a BC, estando aquél comprendido en el interior del triángulo, es igual a b.

I.264. En un triángulo se trazan tres rectas paralelas a sus lados y tangentes a la circunferencia inscrita. Estas separan del triángulo dado tres triángulos. Los radios de sus circunferencias circunscritas son iguales a R_1, R_2, R_3. Hallar el radio de la circunfe-

rencia circunscrita alrededor del triángulo dado.

I.265. En una circunferencia de radio R están trazadas las cuerdas AB y AC. En AB o en su prolongación más allá del punto B se toma el punto M; la distancia entre éste y la recta AC es igual a $|AC|$. Análogamente, en AC o en su prolongación más allá del punto C se toma un punto N; la distancia de éste hasta la recta AB es $|AB|$. Hallar $|MN|$.

I.266. Se da una circunferencia de radio R con el centro O. Las otras dos circunferencias son tangentes a la dada por el interior y se intersecan en los puntos A y B. Hallar la suma de los radios de dos últimas circunferencias, si se conoce que $\angle OAB = 90°$.

I.267. En un círculo de radio R se trazan dos cuerdas que se intersecan perpendicularmente. Hallar: a) la suma de los cuadrados de los cuatro segmentos de estas cuerdas, resultantes al dividirlas por el punto de intersección; b) la suma de los cuadrados de las cuerdas, si la distancia entre el centro de círculo y el punto de su intersección es igual a a.

I.268. Vienen dadas dos circunferencias concéntricas con radios r y R $(r < R)$. Por cierto punto P de la circunferencia menor se traza una recta que corta la circunferencia mayor en los puntos B y C. La perpendicular a BC en el punto P corta la circunferencia menor en el punto A. Hallar $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2$.

I.269. En un semicírculo, desde los extremos del diámetro se trazan dos cuerdas que se intersecan. Demostrar que la suma de los

productos resultantes al multiplicar toda la cuerda por el segmento de cada cuerda, adyacente al diámetro, es igual al cuadrado de este último.

I.270. Sean a, b, c y d las longitudes de los lados de un cuadrilátero inscrito (a y c son los lados opuestos), h_a, h_b, h_c y h_d son las distancias desde el centro del círculo circunscrito hasta los lados correspondientes. Demostrar que si el centro del círculo se encuentra en el interior del cuadrilátero, $ah_c + ch_a = bh_d + dh_b$.

I.271. Los lados opuestos del cuadrilátero inscrito en una circunferencia se intersecan en los puntos P y Q. Hallar $|PQ|$, si las tangentes a la circunferencia trazadas desde P y Q, son iguales a a y b.

I.272. En una circunferencia de radio R está inscrito un cuadrilátero. Sean P, Q y M, respectivamente, los puntos de intersección de las diagonales de este cuadrilátero y de las prolongaciones de sus lados opuestos. Hallar los lados del triángulo PQM, si las distancias desde P, Q y M hasta el centro de la circunferencia son a, b y c.

I.273. El cuadrilátero $ABCD$ está circunscrito alrededor de una circunferencia de radio r. El punto de tangencia de la circunferencia con el lado AB parte este lado en los segmentos a y b, y el punto de tangencia de la circunferencia con el lado AD parte éste en los segmentos a y c. ¿En qué límites puede variar r?

I.274. Una circunferencia de radio r toca interiormente la circunferencia con radio R; A es el punto de tangencia. Una recta per-

pendicular a la línea de centros atraviesa una de las circunferencias dadas en el punto B y la otra, en el punto C. Hallar el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC.

I.275. Dos circunferencias con radios R y r se intersecan; A es uno de los puntos de intersección, BC, la tangente común (B y C son los puntos de tangencia). Hallar el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC.

I.276. En el cuadrilátero $ABCD$ $|AB| = a$, $|AD| = b$; los lados BC, CD y AD entran en contacto con cierta circunferencia, cuyo centro se encuentra en el punto medio de AB. Hallar $|BC|$.

I.277. En el cuadrilátero inscrito $ABCD$ $|AB| = a$, $|AD| = b$ $(a > b)$. Hallar $|BC|$, si se sabe que BC, CD y AD son tangentes a cierta circunferencia, cuyo centro se encuentra sobre AB.

* * *

I.278. En el cuadrilátero convexo $ABCD$ $|AB| = |AD|$. En el interior del triángulo ABC se toma el punto M tal que $\angle MBA = \angle ADC$, $\angle MCA = \angle ACD$. Hallar $\angle MAC$, si $\angle BAC = \alpha$, $\angle ADC - \angle ACD = \varphi$, $|AM| < |AB|$.

I.279. Dos circunferencias que se intersecan, están inscritas en un ángulo; A es el vértice del ángulo, B, uno de los puntos de intersección de las circunferencias, C, el punto medio de la cuerda, cuyos extremos son los puntos de tangencia de la primera circunfe-

rencia con los lados del ángulo. Hallar $\angle ABC$, si se sabe que la cuerda común se ve desde el centro de la segunda circunferencia bajo el ángulo α.

I.280. ABC es un triángulo isósceles: $|AC| = |BC|$, BD es la bisectriz y $BDEF$, un rectángulo. Hallar $\angle BAF$, si $\angle BAE = 120°$.

I.281. El triángulo ABC tiene circunscrita una circunferencia con el centro en el punto O. La tangente a la circunferencia en el punto C se interseca en el punto K con la recta que divide por la mitad el ángulo B; además, el ángulo BKC es igual a la mitad de la diferencia del ángulo A triplicado y del ángulo C del triángulo. La suma de los lados AC y AB es igual a $2 + \sqrt{3}$ y la de las distancias entre el punto O y los lados AC y AB es igual a 2. Hallar el radio de la circunferencia.

I.282. Unos puntos simétricos a los vértices de un triángulo respecto de los lados opuestos, son vértices de un triángulo con los lados de $\sqrt{8}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{14}$. Determinar los lados del triángulo de partida, si se sabe que sus longitudes son diferentes.

I.283. El ángulo comprendido entre la mediana y la altura que salen del ángulo A del triángulo ABC, es igual a α; el ángulo entre la mediana y la altura que parten del ángulo B, es igual a β. Hallar el ángulo entre la mediana y la altura que salen del ángulo C.

I.284. El radio del círculo circunscrito alrededor de un triángulo es R. La distancia desde el centro de este círculo hasta el punto

de intersección de las medianas del triángulo es d. Hallar el producto del área del triángulo dado y del triángulo formado por las rectas que pasan por sus vértices perpendicularmente a las medianas, las cuales parten de estos vértices.

I.285. Los puntos A_1, A_3 y A_5 están sobre una misma recta, y los puntos A_2, A_4, A_6, sobre otra recta que se interseca con la primera. Hallar el ángulo comprendido entre estas rectas, si se sabe que los lados del hexágono (posiblemente, con puntos múltiples) $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ son iguales entre sí.

I.286. Dos circunferencias con los centros O_1 y O_2 tienen puntos de tangencia por interior con una circunferencia de radio R y centro O. Se sabe que $|O_1O_2| = a$. La recta tangente a las dos primeras circunferencias que corta el segmento O_1O_2, se interseca con sus tangentes exteriores comunes en los puntos M y N y con la circunferencia mayor en los puntos A y B. Hallar la razón $|AB| : |MN|$, si: a) el segmento O_1O_2 contiene el punto O; b) las circunferencias con los centros O_1 y O_2 entran en contacto una con otra.

I.287. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC tiene contacto con el lado AC en el punto M y el lado BC en el punto N; La bisectriz del ángulo A corta la recta MN en el punto K, y la bisectriz del ángulo B corta la recta MN en el punto L. Demostrar que con ayuda de los segmentos MK, NL y KL se puede formar un triángulo. Hallar el área de este triángulo, si el área del triángulo ABC es S y el ángulo C es α.

I.288. En los lados AB y BC del cuadrado $ABCD$ se toman dos puntos M y N de manera que $|BM| + |BN| = |AB|$. Demostrar que las rectas DM y DN dividen la diagonal AC en tres segmentos que pueden formar un triángulo; además, uno de los ángulos de este triángulo es igual a $60°$.

I.289. Viene dado el triángulo isósceles ABC; $|AB| = |BC|$, AD es la bisectriz. La perpendicular levantada hacia AD en el punto D corta la prolongación de AC en el punto E y los pies de las perpendiculares bajadas desde B y D sobre AC, en M y N, respectivamente. Hallar $|MN|$, si $|AE| = a$.

I.290. Desde el punto A bajo el ángulo α parten dos rayos. En un rayo se toman dos puntos B y B_1 y en el otro, C y C_1. Hallar la cuerda común de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos ABC y AB_1C_1, si $|AB| - |AC| = |AB_1| - |AC_1| = a$.

I.291. Supongamos que O es el centro de una circunferencia; C, un punto tomado en la circunferencia; M, el punto medio de OC. Los puntos A y B se encuentran en la circunferencia por un lado de la recta OC de manera que $\angle AMO = \angle BMC$. Hallar $|AB|$, si $|AM| - |BM| = a$.

I.292. Sean A, B y C tres puntos señalados sobre una recta. En AB, BC y AC como sobre diámetros están construidos tres semicírculos por un lado de la recta. El centro de la circunferencia que toca los tres semicírculos, se encuentra a la distancia d de la recta AC. Hallar el radio de esta circunferencia.

I.293. En una circunferencia de radio R está trazada la cuerda AB. Sea M un punto arbitrario de la circunferencia. Tracemos en el rayo MA el segmento MN ($|MN| = R$) y en el rayo MB, el segmento MK, igual a la distancia desde M hasta el punto de intersección de las alturas del triángulo MAB. Hallar $|NK|$, si el menor de los arcos subtensados por AB es igual a 2α.

I.294. La altura bajada desde el vértice del ángulo recto de un triángulo sobre la hipotenusa divide el triángulo en dos triángulos, en cada uno de los cuales están inscritas sendas circunferencias. Determinar los ángulos y el área del triángulo formado por los catetos del triángulo inicial y la recta que pasa por los centros de circunferencias, si la altura del triángulo de partida es h.

I.295. La altura de un triángulo rectángulo bajada sobre la hipotenusa es h. Demostrar que los vértices de los ángulos agudos del triángulo y las proyecciones del pie de la altura sobre los catetos se hallan en una misma circunferencia. Determinar la longitud de la cuerda cortada por esta circunferencia en la recta que contiene la altura, y los segmentos de la cuerda, en los cuales la divide la hipotenusa.

I.296. Una circunferencia de radio R es tangente a la recta l en el punto A; AB es el diámetro de esta circunferencia, BC, una cuerda arbitraria. Sea D el pie de la perpendicular bajada desde C sobre AB. El punto E se encuentra en la prolongación de CD más allá del punto D, además, $|ED| = |BC|$. Las

tangentes a la circunferencia, que pasan por E, cortan la recta l en los puntos K y N. Hallar $|KN|$.

I.297. En el cuadrilátero convexo $ABCD$ $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|BC| = p - a$, $|DC| = p - b$. Sea O el punto de intersección de las diagonales. Designemos por α el ángulo BAC. ¿A qué tiende $|AO|$, si $\alpha \to 0$?

II. Problemas y teoremas selectos de planimetría

§ 1. Teorema de Carnot

II.1. Se dan dos puntos A y B. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos M tales que $|AM|^2 - |MB|^2 = k$ (donde k es un número dado), es una recta perpendicular a AB.

II.2. Supongamos que las distancias desde cierto punto M hasta los vértices A, B y C del triángulo ABC se expresan con los números a, b y c. Demostrar que cualquiera que sea $d \neq 0$, no hay puntos del plano, cuyas distancias hasta los vértices se expresen en el mismo orden con los números $\sqrt{a^2 + d}$, $\sqrt{b^2 + d}$, $\sqrt{c^2 + d}$.

II.3. *Teorema de Carnot.* Demostrar que para que las perpendiculares bajadas desde los puntos A_1, B_1 y C_1 sobre los lados BC, CA y AB del triángulo ABC se intersequen en un punto, es necesario y suficiente que $|A_1B|^2 - |BC_1|^2 + |C_1A|^2 - |AB_1|^2 + |B_1C|^2 - |CA_1|^2 = 0$.

II.4. Demostrar que si las perpendiculares bajadas desde los puntos A_1, B_1 y C_1 sobre los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, respectivamente, se intersecan en un punto, asi-

mismo las perpendiculares bajadas desde los puntos A, B y C sobre las rectas B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1 también se intersecan en un punto.

II.5. Viene dado el cuadrilátero $ABCD$. Sean A_1, B_1 y C_1 los puntos de intersección de las alturas de los triángulos BCD, ACD y ABD. Demostrar que las perpendiculares bajadas desde A, B y C sobre las rectas B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1, respectivamente, se intersecan en un punto.

II.6. Se dan dos puntos A y B. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos M tales que $k \mid AM \mid^2 + l \mid BM \mid^2 = d$ (k, l, d son números dados, $k + l \neq 0$) es una circunferencia con el centro en la recta AB, un punto o un conjunto vacío.

II.7. Supongamos que A_1, A_2, . . ., A_n son puntos fijos; k_1, k_2, . . ., k_n, números dados. Entonces el lugar geométrico de los puntos M tales que la suma $k_1 \mid A_1M \mid^2 + k_2 \mid A_2M \mid^2 + \ldots + k_n \mid A_nM \mid^2$ es constante, será: a) una circunferencia, un punto o un conjunto vacío, si $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0$; b) una recta, un conjunto vacío o todo el plano, si $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 0$.

II.8. Se dan una circunferencia y el punto A fuera de ésta. Supongamos que una circunferencia que pasa por A, entra en contacto con la dada en el punto arbitrario B, y las tangentes a la segunda trazadas por los puntos A y B se intersecan en el punto M. Hallar el lugar geométrico de los puntos M.

II.9. Se dan dos puntos A y B. Hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que $\mid AM \mid : \mid MB \mid = k \neq 1$.

II.10. Tres puntos A, B y C están en una recta (B se encuentra entre A y C). Tomemos una circunferencia arbitraria con el centro en B y designemos con M el punto de intersección de las tangentes trazadas desde A y C a esta circunferencia. Hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que los puntos de tangencia de AM y CM con la circunferencia pertenezcan a los intervalos AM y CM.

II.11. Se dan dos circunferencias. Hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que la razón entre las longitudes de las tangentes trazadas desde M a las circunferencias dadas sea igual a la magnitud constante k.

II.12. Supongamos que una recta corta una circunferencia en los puntos A y B y otra circunferencia lo hace en los puntos C y D. Demostrar que los puntos de intersección de las tangentes a la primera circunferencia, trazadas en los puntos A y B, con las tangentes trazadas a la segunda circunferencia en los puntos C y D (se examinan los puntos, en los cuales se intersecan las tangentes a diferentes circunferencias) se hallan en una circunferencia, cuyo centro se encuentra en la recta que pasa por los centros de las circunferencias dadas.

II.13. Tomemos tres circunferencias, cada una de las cuales entra en contacto con un lado de un triángulo y las prolongaciones de los otros dos lados. Demostrar que las perpendiculares levantadas hacia los lados del triángulo en los puntos de tangencia de estas circunferencias concurren en un punto.

II.14. En el triángulo ABC examinemos

todos los pares posibles de los puntos M_1 y M_2 tales que $|AM_1|:|BM_1|:|CM_1| = |AM_2|:|BM_2|:|CM_2|$. Demostrar que todas las rectas M_1M_2 pasan por un mismo punto fijo del plano.

II.15. Las distancias del punto M hasta los vértices A, B y C del triángulo son iguales a 1, 2 y 3, respectivamente, y del punto M_1, a 3, $\sqrt{15}$ y 5, respectivamente. Demostrar que la recta MM_1 pasa por el centro de un círculo circunscrito alrededor del triángulo ABC.

II.16. Sean A_1, B_1, C_1 los pies de las perpendiculares bajadas desde los vértices A, B y C del triángulo ABC sobre la recta l. Demostrar que las perpendiculares bajadas desde A_1, B_1 y C_1 sobre BC, CA y AB, respectivamente, se intersecan en un punto.

II.17. Se dan el triángulo regular ABC y el punto arbitrario D; A_1, B_1 y C_1 son los centros de las circunferencias inscritas en los triángulos BCD, CAD y ABD. Demostrar que las perpendiculares bajadas desde los vértices A, B y C sobre B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1, respectivamente, concurren en un punto.

II.18. Se dan tres circunferencias que se intersecan de dos en dos. Demostrar que tres cuerdas comunes de estas circunferencias pasan por un mismo punto.

II.19. Sobre las rectas AB y AC se toman los puntos M y N, respectivamente. Demostrar que la cuerda común de las dos circunferencias con diámetros CM y BN pasa por el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC.

II.20. En un plano se da una circunferencia y el punto N. Sea AB una cuerda arbitraria de la circunferencia. Designemos con M el punto de intersección de la recta AB y de la tangente en el punto N a la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABN. Hallar el lugar geométrico de los puntos M.

II.21. En el interior de una circunferencia se toma el punto A. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las tangentes trazadas a la circunferencia en los extremos de todas las cuerdas posibles que pasan por el punto A.

II.22. Se dan los números α, β, γ y k. Sean x, y, z las distancias del punto M tomado en el interior de un triángulo hasta sus lados. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos M tales que $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$ es vacío, es un segmento o coincide con el conjunto de todos los puntos del triángulo.

II.23. Hallar el lugar geométrico de los puntos M en el interior del triángulo dado y tales que las distancias desde M hasta los lados del triángulo dado pueden servir de lados de cierto triángulo.

II.24. Sean A_1, B_1 y C_1 los puntos medios de los lados BC, CA y AB del triángulo ABC. En las perpendiculares bajadas desde cierto punto M sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, se toman los puntos A_2, B_2 y C_2. Demostrar que las perpendiculares bajadas desde A_1, B_1 y C_1, respectivamente, sobre las rectas B_2C_2, C_2A_2 y A_2B_2 se intersecan en un punto.

II.25. Se da la recta l y tres rectas l_1, l_2

y l_3 perpendiculares a l. Sean A, B y C tres puntos fijos en la recta l; A_1 es un punto arbitrario en l_1; B_1, en l_2; C_1, en l_3. Demostrar que si para cierta posición de los puntos A_1, B_1 y C_1 las perpendiculares bajadas desde A, B y C sobre las rectas B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1, respectivamente, concurren en un punto, entonces estas perpendiculares siempre se intersecarán en un punto.

II.26. AA_1, BB_1, CC_1 son las alturas del triángulo ABC, A_2, B_2 y C_2 son las proyecciones de A, B y C, respectivamente, sobre B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1. Demostrar que las perpendiculares bajadas desde A_2, B_2 y C_2, respectivamente, sobre BC, CA y AB se intersecan en un punto.

§ 2. Teoremas de Ceva y de Menelao. Problemas afines

II.27. Demostrar que el área del triángulo, cuyos lados son iguales a las medianas del triángulo dado, constituye 3/4 de área del triángulo dado.

II.28. En el paralelogramo $ABCD$, la recta paralela a BC corta AB y CD, respectivamente, en los puntos E y F; la recta paralela a AB corta BC y DA, respectivamente, en los puntos G y H.

Demostrar que las rectas EH, GF y BD se intersecan en un punto o son paralelas.

II.29. A, B, C y D son cuatro puntos fijos en la recta l. Por A y B están trazadas arbitrariamente dos rectas paralelas; por C y D,

otras dos rectas paralelas. Las rectas trazadas forman un paralelogramo. Demostrar que las diagonales de este paralelogramo cortan l en dos puntos fijos.

II.30. En el cuadrilátero $ABCD$ O es el punto de intersección de las diagonales AC y BD; M, un punto en AC tal, que $|AM| = |OC|$; N, un punto en BD tal, que $|BN| = |OD|$; K y L son los puntos medios de AC y BD. Demostrar que las rectas ML, NK, así como la recta que une los puntos de intersección de las medianas de los triángulos ABC y ACD, se intersecan en un punto.

II.31. En el lado BC del triángulo ABC se toman los puntos A_1 y A_2, simétricos respecto al punto medio de BC. De la misma manera, en el lado AC se toman los puntos B_1 y B_2 y en el lado AB, C_1 y C_2. Demostrar que los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son equivalentes y los centros de masas de los triángulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ y ABC se hallan en una misma recta.

II.32. Por M que es el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC, está trazada una recta que corta los lados AB y AC en los puntos K y L, respectivamente, y la prolongación de BC en el punto P (C se encuentra entre P y B). Demostrar que $\frac{1}{|MK|} = \frac{1}{|ML|} + \frac{1}{|MP|}$.

II.33. Por el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ se traza una recta que corta AB en el punto M y CD en el punto N. Por M y N se trazan las rectas paralelas a CD y AB, respectivamente, que

cortan AC y BD en los puntos E y F. Demostrar que $BE \parallel CF$.

II.34. En el cuadrilátero $ABCD$, en las rectas AC y BD se toman, respectivamente, los puntos K y M de manera que $BK \parallel AD$, $AM \parallel BC$. Demostrar que $KM \parallel CD$.

II.35. Sea E un punto arbitrario en el lado AC del triángulo ABC. Por el vértice B tracemos una recta arbitraria l. La recta que pasa por E en paralelo a BC, corta l en el punto N y la paralela a AB atraviesa l en el punto M. Demostrar que $AN \parallel CM$.

* * *

II.36. Los lados de un cuadrilátero convexo están divididos en $(2n + 1)$ partes iguales cada uno. Los puntos correspondientes de división de los lados opuestos están unidos entre sí. Demostrar que el área del cuadrilátero central constituye $1/(2n + 1)^2$ parte del área de todo el cuadrilátero.

II.37. La recta que pasa por los puntos medios de las diagonales AC y BC del cuadrilátero $ABCD$ corta los lados AB y DC, respectivamente en los puntos M y N. Demostrar que $S_{DCM} = S_{ABN}$. Aquí y más adelante S designa el área de la figura señalada en el subíndice.

II.38. En el paralelogramo $ABCD$, los vértices A, B, C y D están unidos con los puntos medios de los lados CD, AD, AB y BC, respectivamente. Demostrar que el área del cuadrilátero formado por estas rectas constituye 1/5 parte del área del paralelogramo.

II.39. Demostrar que el área del octágono formado por las rectas que unen los vértices de un paralelogramo con los puntos medios de los lados opuestos, es igual a 1/6 parte del área del paralelogramo.

II.40. En los lados AC y BC del triángulo ABC hacia el exterior están construidos dos paralelogramos $ACDE$ y $BCFG$. Las prolongaciones de DE y FD se intersecan en el punto H. Sobre el lado AB está construido el paralelogramo $ABML$, cuyos lados AL y BM son iguales y paralelos a HC. Demostrar que el paralelogramo $ABML$ es equivalente a la suma de los paralelogramos construidos sobre AC y BC.

II.41. Por los extremos de la base menor de un trapecio están trazadas dos rectas paralelas que cortan la base mayor. Las diagonales del trapecio y estas rectas dividen el trapecio en siete triángulos y un pentágono. Demostrar que la suma de las áreas de tres triángulos adyacentes a los lados y a la base menor del trapecio, es igual al área del pentágono.

II.42. Sea $ABCD$ un paralelogramo; el punto E se halla en la recta AB; F, en la recta AD (B, en el segmento AE; D, en el segmento AF), K es el punto de intersección de las rectas ED y FB. Demostrar que los cuadriláteros $ABKD$ y $CEKF$ son equivalentes.

* * *

II.43. Examinemos el triángulo arbitrario ABC. Sean A_1, B_1, C_1 tres puntos en las rectas BC, CA, AB, respectivamente. Introduzcamos

las designaciones siguientes:

$$R=\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

$$R^*=\frac{\operatorname{sen}\angle ACC_1}{\operatorname{sen}\angle C_1CB}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle BAA_1}{\operatorname{sen}\angle A_1AC}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle CBB_1}{\operatorname{sen}\angle B_1BA}.$$

Demostrar que $R = R^*$.

II.44. *Teorema de Ceva*. Para que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 se intersequen en un punto (o las tres sean paralelas), es necesario y suficiente que $R = 1$ (véase el problema II.43) y, además, entre los tres puntos A_1, B_1, C_1 uno o los tres puntos se hallen en los lados del triángulo ABC, y no en las prolongaciones de sus lados.

II.45. *Teorema de Menelao*. Para que los puntos A_1, B_1, C_1 se hallen en una recta, es necesario y suficiente que $R = 1$ (véase el problema II.43) y, además, entre los tres puntos A_1, B_1, C_1 ninguno o dos puntos se sitúen en los lados del triángulo ABC y no en sus prolongaciones.

Observación. Es posible en vez de la relación $\frac{|AC_1|}{|C_1B|}$ y otras examinar la razón entre los segmentos dirigidos, que designaremos con $\frac{AC_1}{C_1B}$, y determinar de la manera siguiente: $\left|\frac{AC_1}{C_1B}\right|=\frac{|AC_1|}{|C_1B|}$, $\frac{AC_1}{C_1B}$ es positiva cuando los vectores $\overrightarrow{AC_1}$ y $\overrightarrow{C_1B}$ tienen la dirección igual, y negativa, si éstos tienen direcciones opuestas. ($\frac{AC_1}{C_1B}$ tiene sentido sólo para los puntos

dispuestos en una recta.) Es fácil ver que la razón $\frac{AC_1}{C_1B}$ es positiva, si el punto C_1 se halla en el segmento AB, y negativa, si C_1 se encuentra fuera de AB. Respectivamente, en vez de R examinaremos el producto de las razones de los segmentos dirigidos que designaremos con $\tilde{R}$. Luego introduzcamos los ángulos dirigidos. Por $\measuredangle ACC_1$, etc. entenderemos un ángulo, al cual debe girar CA alrededor de C en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj hasta que el rayo CA coincida con el rayo CC_1. Ahora, en vez de R^* examinemos $\tilde{R}^*$, o sea, el producto correspondiente de las razones de los senos de los ángulos dirigidos.

Ahora hace falta formular de nuevo los problemas II.43, II.44 y II.45.

43*. Demostrar que $\tilde{R} = \tilde{R}^*$.

44*. *Teorema de Ceva.* Para que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 se intersequen en un punto (o sean paralelas), es necesario y suficiente que $\tilde{R} = 1$.

45*. *Teorema de Menelao.* Para que los puntos A_1, B_1, C_1 se hallen en una recta, es necesario y suficiente que $\tilde{R} = -1$.

II.46. Demostrar que si tres rectas que pasan por los vértices de un triángulo, se intersecan en un mismo punto, entonces las rectas simétricas a aquéllas respecto a las bisectrices correspondientes del triángulo, también concurren en un mismo punto o son paralelas.

II.47. Supongamos que O es un punto arbitrario en un plano, M y N, los pies de las perpendiculares bajadas desde el punto O sobre las bisectrices de los ángulos interior y exterior A del triángulo ABC; P y Q están definidos de manera análoga para el ángulo B; R y T, para el ángulo C. Demostrar que las rectas MN, PQ y RT se intersecan en un punto o son paralelas.

II.48. Supongamos que O es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, A_0, B_0, C_0 son los puntos de tangencia de esta circunferencia con los lados BC, CA, AB, respectivamente. En los rayos OA_0, OB_0, OC_0, se toman, respectivamente, los puntos L, M, K que se encuentran a distancia igual de O. a) Demostrar que las rectas AL, BM y CK concurren en un punto. b) Sean A_1, B_1, C_1 las proyecciones de A, B, C sobre una recta arbitraria l que pasa por O. Demostrar que las rectas A_1L, B_1M y C_1K se intersecan en un punto.

II.49. Para que las diagonales AD, BE y CF del hexágono $ABCDEF$ inscrito en una circunferencia concurran en un punto, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad $|AB|\cdot|CD|\cdot|EF| = |BC|\cdot|DE|\cdot|FA|$.

II.50. Demostrar que: a) las bisectrices de los ángulos exteriores del triángulo cortan las prolongaciones de los lados opuestos de éste en tres puntos dispuestos en una recta; b) las tangentes a la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo, trazadas por los vértices de éste, cortan sus lados opuestos en tres puntos dispuestos en una recta.

II.51. Una circunferencia corta el lado AB del triángulo ABC en los puntos C_1 y C_2, el lado CA, en los puntos B_1 y B_2, el lado BC, en los puntos A_1 y A_2. Demostrar que si las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 se intersecan en un punto, las rectas AA_2, BB_2 y CC_2 también lo hacen en un punto.

II.52. En los lados AB, BC y CA del triángulo ABC se toman los puntos C_1, A_1 y B_1. Supongamos que C_2 es el punto de intersección de las rectas AB y A_1B_1; A_2 es el punto de intersección de las rectas BC y B_1C_1; B_2 es el punto de intersección de las rectas AC y A_1C_1. Demostrar que si las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 concurren en un punto, los puntos A_2, B_2 y C_2 se hallan en una recta.

• II.53. Una recta corta los lados AB, BC y la prolongación del lado AC del triángulo ABC, respectivamente, en los puntos D, E y F. Demostrar que los puntos medios de los segmentos DC, AE y BF se encuentran en una recta (*recta de Gauss*).

II.54. Viene dado el triángulo ABC. Definamos en el lado BC el punto A_1 de la manera siguiente: A_1 es el punto medio del lado KL del pentágono regular $MKLNP$, cuyos vértices K y L se hallan en BC y los vértices M y N, en AB y AC, respectivamente. De manera análoga, en los lados AB y AC están definidos los puntos C_1 y B_1. Demostrar que las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 concurren en un punto.

II.55. Se dan tres círculos que no se intersecan, y entre los cuales no hay dos que se corten. Designemos con A_1, A_2, A_3 tres puntos de intersección de las tangentes interiores co-

munes a dos cualesquiera de aquéllos, y con B_1, B_2, B_3, los puntos correspondientes de intersección de las tangentes exteriores. Demostrar que estos puntos se sitúan en cuatro rectas, tres puntos en cada una (A_1, A_2, B_3; A_1, B_2, A_3; B_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3).

II.56. Demostrar que si las rectas que pasan por los vértices A, B y C del triángulo ABC paralelamente a las rectas B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1, respectivamente, se intersecan en un punto, entonces también las rectas que pasan por A_1, B_1 y C_1 paralelamente a las rectas BC, CA y AB, igualmente se intersecan en un punto (o son paralelas).

II.57. En el triángulo ABC, M es un punto arbitrario del plano. Las bisectrices de los dos ángulos formados por las rectas AM y BM cortan la recta AB en los puntos C_1 y C_2 (C_1 se halla en el segmento AB); de la misma manera en BC y CA se definen los puntos A_1 y A_2, B_1 y B_2. Demostrar que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 se sitúan por tres en cada una de las cuatro rectas.

II.58. En los lados BC, CA y AB del triángulo ABC se toman los puntos A_1, B_1, C_1, respectivamente, y en los lados B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 del triángulo $A_1B_1C_1$, A_2, B_2, C_2. Se sabe que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 concurren en un punto, así como las rectas A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 se intersecan en un punto. Demostrar que las rectas AA_2, BB_2, CC_2 concurren en un punto (o son paralelas).

II.59. Supongamos que $ABCD$ es un cuadrilátero, P, el punto de intersección de BC y AD, Q, el punto de intersección de CA y BD,

R es el punto de intersección de AB y CD. Demostrar que los puntos de intersección de BC y QR, de CA y RP, de AB y PQ se hallan en una recta.

II.60. En un lado del ángulo con el vértice O se toman los puntos A_1, A_2, A_3, A_4 y en otro, B_1, B_2, B_3, B_4. Las rectas A_1B_1 y A_2B_2 concurren en el punto N y las rectas A_3B_3 y A_4B_4, en el punto M. Demostrar que para que los puntos O, N y M se hallen en una recta, es necesario y suficiente el cumplimiento de la igualdad

$$\frac{OB_1}{OB_3}\cdot\frac{OB_2}{OB_4}\cdot\frac{B_3B_4}{B_1B_2}=\frac{OA_1}{OA_3}\cdot\frac{OA_2}{OA_4}\cdot\frac{A_3A_4}{A_1A_2}.$$

(Véase la observación a los problemas II.43, II.44, II.45).

II.61. En los lados BC, CA y AB del triángulo ABC se toman los puntos A_1 y A_2, B_1 y B_2, C_1 y C_2, respectivamente, de manera que AA_1, BB_1 y CC_1 concurren en un punto y AA_2, BB_2 y CC_2 también se intersecan en un punto. Demostrar que: a) los puntos de intersección de las rectas A_1B_1 y AB, B_1C_1 y BC, C_1A_1 y CA se sitúan en la recta l_1. De la misma manera los puntos A_2, B_2 y C_2 definen la recta l_2; b) el punto A, punto de intersección de las rectas l_1 y l_2, así como el de intersección de las rectas B_1C_1 y B_2C_2 se hallan en una recta; c) los puntos de intersección de las rectas BC y B_2C_1, CA y C_2A_2, AB y A_1B_1 se sitúan en una recta.

II.62. Una recta arbitraria corta las rectas AB, BC y CA en los puntos K, M y L, respectivamente, y las rectas A_1B_1, B_1C_1 y C_1A_1, en

los puntos K_1, M_1 y L_1. Demostrar que si las rectas A_1M, B_1L y C_1K concurren en un punto, entonces las rectas AM_1, BL_1 y CK_1 también se intersecan en un punto.

II.63. Se dan el triángulo ABC y el punto D. Los puntos E, F y G se hallan, respectivamente, en las rectas AD, BD y CD, K es el punto de intersección de AF y BE, L, el punto de intersección de BG y CF, M, el punto de intersección de CE y AG. En los puntos P, Q y R se intersecan DK y AB, DL y BC, DM y AC, respectivamente. Demostrar que las seis rectas AL, EQ, BM, FR, CK y GP se intersecan en un punto.

II.64. Los puntos designados con letras iguales A y A_1, B y B_1, C y C_1 se sitúan simétricamente respecto a la recta l; N es un punto arbitrario en l. Demostrar que las rectas AN, BN, CN cortan respectivamente las rectas B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 en tres puntos dispuestos en una recta.

II.65. Sean A_1, A_3, A_5 tres puntos en una recta; A_2, A_4, A_6, en otra. Demostrar que tres puntos, en los cuales se intersecan de dos en dos las rectas A_1A_2 y A_4A_5, A_2A_3 y A_5A_6, A_3A_4 y A_6A_1 se hallan en una recta (*teorema de Pappus*).

§ 3. Lugares geométricos de puntos

II.66. Por el punto de intersección de dos circunferencias se traza una recta que por segunda vez corta las circunferencias en dos puntos A y B. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos AB.

II.67. Se dan el punto A y la recta l; B es un punto arbitrario de l. Hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que ABM sea un triángulo regular.

II.68. Se da el triángulo regular ABC. En las prolongaciones de sus lados AB y AC más allá de los puntos B y C se toman los puntos D y E de tal manera que $|BD|\cdot|CE| = |BC|^2$. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas DC y BE.

II.69. Se dan tres puntos A, B y C en una recta; D es un punto arbitrario del plano que no se encuentra en esta recta. Tracemos por C las rectas paralelas a AD y BD hasta la intersección con las rectas BD y AD en los puntos P y Q. Hallar el lugar geométrico de los pies M de las perpendiculares bajadas desde C sobre PQ, y encontrar todos los puntos D, para los cuales M es un punto fijo.

II.70. En el lado AC del triángulo ABC se toma el punto K y en la mediana BD, el punto P de tal manera que el área del triángulo APK es igual al área del triángulo BPC. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas AP y BK.

II.71. Por el punto dado O en el interior de un ángulo prefijado pasan dos rayos que forman el ángulo establecido α. Supongamos que el primer rayo corta un lado del ángulo en el punto A, mientras que el segundo corta el otro lado del ángulo en el punto B. Hallar el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares bajadas desde O sobre la recta AB.

II.72. En una circunferencia están trazados dos diámetros AC y BD mutuamente per-

pendiculares. P es un punto arbitrario de la circunferencia, PA corta BD en el punto E. La recta que pasa por E paralelamente a AC concurre con la recta PB en el punto M. Hallar el lugar geométrico de los puntos M.

II.73. Se dan un ángulo, cuyo vértice se encuentra en el punto M, y el punto B. Una circunferencia arbitraria que pasa por M y B, corta los lados del ángulo en los puntos C y D (distintos de M). Hallar el lugar geométrico de los centros de masas de los triángulos MCD.

II.74. Uno de los vértices de un rectángulo se encuentra en un punto dado, los otros dos que no pertenecen a un lado, en dos rectas prefijadas mutuamente perpendiculares. Hallar el lugar geométrico de los cuartos vértices de semejantes rectángulos.

II.75. Sea A uno de los dos puntos de intersección de dos circunferencias dadas; por el otro punto de intersección está trazada una recta arbitraria que corta una circunferencia en el punto B y a la otra, en el punto C, diferentes de los puntos comunes de estas circunferencias. Hallar el lugar geométrico: a) de los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de ABC; b) de los centros de masas del triángulo ABC; c) de los puntos de intersección de las alturas del triángulo ABC.

II.76. Sean B y C dos puntos fijos de una circunferencia dada; A es un punto variable de la misma circunferencia. Hallar el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares bajadas desde el punto medio de AB sobre AC.

II.77. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las diagonales en los

rectángulos, cuyos lados (o sus prolongaciones) pasan por cuatro puntos dados del plano.

II.78. Se dan dos círculos tangentes interiormente en el punto A. La tangente al círculo menor corta la circunferencia mayor en los puntos B y C. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC.

II.79. Vienen dadas dos circunferencias que se intersecan. Hallar el lugar geométrico de los centros de los rectángulos con vértices en estas circunferencias.

II.80. Sobre la mesa de billar redonda, en el punto A distinto del centro, se halla una bola elástica, cuyas dimensiones pueden despreciarse. Indicar el lugar geométrico de los puntos A, desde los cuales se pueda dirigir la bola elástica de manera que ésta, evitando el centro de la mesa de billar, acierte en el punto A después de tres rebotes de su baranda.

II.81. Por un punto equidistante de dos rectas paralelas dadas está trazada una recta que corta estas rectas en los puntos M y N. Hallar el lugar geométrico de los vértices P de los triángulos equiláteros MNP.

II.82. Se dan dos puntos A y B y la recta l. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A y B y cortan la recta l.

II.83. Se dan dos puntos O y M. Determinar: a) el lugar geométrico de los puntos del plano, que puedan servir de uno de los vértices de un triángulo con el centro del círculo circunscrito en el punto O y con el centro de masas en el punto M; b) el lugar geométrico

de los puntos del plano, que puedan servir de uno de los vértices de un triángulo obtusángulo con el centro del círculo circunscrito en el punto O y el centro de masas en el punto M.

II.84. Una circunferencia tiene inscrito un triángulo regular. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las alturas de todos los triángulos posibles inscritos en esta misma circunferencia, cuyos dos lados sean paralelos a dos lados del triángulo regular dado.

II.85. Hallar el lugar geométrico de los centros de todos los rectángulos posibles circunscritos alrededor de un triángulo dado. (Llamaremos *circunscrito* al rectángulo, si uno de los vértices del triángulo coincide con el vértice del rectángulo, mientras que los dos otros se hallan en dos lados del rectángulo que no contienen este vértice.)

II.86. Se dan dos cuadrados con los lados correspondientemente paralelos. Determinar el lugar geométrico de los puntos M, tales que para cualquier punto P del primer cuadrado se encuentre un punto Q del segundo, tal que el triángulo MPQ sea regular. Sean a y b los lados del primero y del segundo cuadrados, respectivamente. ¿Para qué relación entre a y b el lugar geométrico buscado de los puntos no es vacío?

II.87. En el interior de un triángulo dado hallar el lugar geométrico de los puntos M, para cada uno de los cuales para cualquier punto N que yace en la frontera del triángulo, pueda encontrarse un punto P en su interior o en la frontera, tal que el área del triángulo

MNP no sea inferior a 1/6 parte del área del triángulo dado.

II.88. Se dan dos puntos A e I. Hallar el lugar geométrico de los puntos B tales que exista el triángulo ABC con el centro del círculo inscrito ubicado en el punto I, todos los ángulos del cual son inferiores a α ($60° < \alpha < 90°$).

II.89. Los puntos A, B y C se encuentran en una recta (B se encuentra entre A y C). Hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que $\operatorname{ctg} \angle AMB + \operatorname{ctg} \angle BMC = k$.

II.90. Se dan dos puntos A y Q. Hallar el lugar geométrico de los puntos B tales que exista el triángulo acutángulo ABC, para el cual Q es el centro de masas.

II.91. Se dan dos puntos A y H. Hallar el lugar geométrico de los puntos B tales que exista el triángulo ABC, para el cual H es el punto de intersección de las alturas y todos los ángulos del cual son superiores a α ($\alpha < \pi/4$).

II.92. En un plano vienen dados dos rayos. Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de estos rayos. (La distancia desde un punto hasta el rayo es igual a la distancia desde este punto hasta el punto del rayo, más próximo a aquél.)

II.93. Se dan un ángulo y una circunferencia con el centro en el punto O, inscrita en este ángulo. Una recta arbitraria es tangente a la circunferencia y corta los lados del ángulo en los puntos M y N. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos MON.

II.94. Se dan dos circunferencias, con sen-

dos puntos A y B equidistantes del punto medio del segmento que une sus centros. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos AB.

II.95. Sobre el segmento dado AB tomemos un punto arbitrario M y examinemos dos cuadrados $AMCD$ y $MBEF$ dispuestos por un lado de AB. Circunscribamos alrededor de estos cuadrados las circunferencias y designemos con N su punto de intersección, distinto de M. Demostrar que: a) AF y BC se intersecan en N; b) MN pasa por un punto fijo del plano. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos que unen los centros de los cuadrados.

II.96. Se dan una circunferencia y el punto A. Sea M un punto arbitrario de la circunferencia. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de la mediatriz trazada al segmento AM y la tangente a la circunferencia que pasa por M.

II.97. Dos circunferencias entran en contacto en el punto A. Una recta que pasa por A, corta por segunda vez estas circunferencias en los puntos B y C, la otra, en los puntos B_1 y C_1 (B y B_1 se sitúan en una misma circunferencia). Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos AB_1C y ABC_1.

II.98. Hallar el lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos de todos los triángulos rectángulos isósceles posibles, los extremos de cuyas hipotenusas se sitúan en dos circunferencias dadas.

II.99. Los lados de un triángulo dado son diagonales de tres paralelogramos. Los lados de estos paralelogramos son paralelos a dos rectas: l y p. Demostrar que las tres diagonales de estos paralelogramos, distintas de los lados del triángulo, concurren en el punto M. Hallar el lugar geométrico de los puntos M, si l y p son dos rectas arbitrarias mutuamente perpendiculares.

II.100. Supongamos que B y C son dos puntos fijos de una circunferencia, A, un punto arbitrario de esta circunferencia, H, el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC y M, la proyección de H sobre la bisectriz del ángulo BAC. Hallar el lugar geométrico de puntos M.

II.101. En el triángulo dado ABC sea D un punto arbitrario en la recta BC. Las rectas que pasan por D paralelamente a AB y AC, cortan AC y AB en los puntos E y F. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por los puntos D, E y F.

II.102. En el triángulo regular dado ABC hallar el lugar geométrico de los puntos M en el interior de este triángulo tales, que $\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = \pi/2$.

II.103. En el interior de un triángulo se toma un punto M tal, que existe una recta l que pasa por M y divide el triángulo dado en dos partes de manera que, dada la transformación simétrica respecto a l, una parte se encuentra en el interior o en la frontera de la otra. Hallar el lugar geométrico de puntos M.

II.104. Desde el vértice A del triángulo ABC están bajadas las perpendiculares AM y AN sobre las bisectrices de los ángulos exteriores del triángulo (B y C). Demostrar que el segmento MN es igual al semiperímetro del triángulo ABC.

II.105. En el triángulo ABC está trazada la altura BD, AN es la perpendicular a AB y CM, la perpendicular a BC; además, $|AN| = |DC|$, $|CM| = |AD|$. Demostrar que M y N son equidistantes del vértice B.

II.106. Demostrar que para cualquier triángulo rectángulo el radio de la circunferencia que entra en contacto con sus catetos y la circunferencia circunscrita (por dentro) es igual al diámetro de la circunferencia inscrita.

II.107. Demostrar que si un lado del triángulo yace sobre un plano recto fijo y el punto de intersección de las alturas coincide con el punto fijo, la circunferencia circunscrita alrededor de este triángulo también pasa por el punto fijo.

II.108. En el triángulo dado ABC sean A_1, B_1 y C_1 los puntos de la circunferencia circunscrita alrededor de ABC, diametralmente opuestos a los vértices A, B y C. Tracemos por A_1, B_1 y C_1 unas rectas paralelas a BC, CA y AB. Demostrar que el triángulo formado por estas rectas es homotético al triángulo ABC con la razón 2 y el centro en el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC.

II.109. Demostrar que las proyecciones del

pie de la altura del triángulo sobre los lados que la comprenden, y sobre las otras dos alturas se hallan en una recta.

II.110. En la prolongación del lado AB del triángulo ABC más allá del punto B se toma el punto D de tal manera que $|BD| = |CB|$. De la misma manera, en la prolongación del lado CB más allá del punto B se toma el punto F de modo que $|BF| = |AB|$. Demostrar que los puntos A, C, D y F se hallan en una circunferencia, cuyo centro se encuentra en la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC.

II.111. Tres circunferencias que se intersecan, pasan por el punto H. Demostrar que H es el punto de intersección de las alturas de un triángulo, cuyos vértices coinciden con los otros tres puntos de intersección de dos en dos de las circunferencias.

II.112. Sea P un punto arbitrario de la circunferencia circunscrita alrededor de un rectángulo. Dos rectas que pasan por P en paralelo a los lados del rectángulo, cortan los lados de éste o sus prolongaciones en los puntos K, L, M y N. Demostrar que N es el punto de intersección de las alturas del triángulo KLM. Demostrar también que los pies de las alturas del triángulo KLM, distintas de P, se hallan en las diagonales del rectángulo.

II.113. El triángulo ABC tiene trazadas las bisectrices AD, BE y CF. Una recta perpendicular a AD, que pasa por el punto medio de AD, corta AC en el punto P. Otra recta perpendicular a BE, que pasa por el punto medio de BE, corta AB en el punto Q. Por

fin, la tercera recta perpendicular a CF, que pasa por el punto medio de CF, corta CB en el punto R. Demostrar que los triángulos DEF y PQR son equivalentes.

II.114. En el triángulo isósceles ABC ($|AB| = |BC|$), D es el punto medio de AC, E, la proyección de D sobre BC, F, el punto medio de DE. Demostrar que las rectas BF y AE son perpendiculares.

II.115. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC entra en contacto con los lados AB y AC en los puntos C_1 y B_1, mientras que la circunferencia que tiene contacto con el lado BC y las prolongaciones de AB y AC, es tangente a las rectas AB y AC en los puntos C_2 y B_2. Sea D el punto medio de BC. La recta AD se interseca con las rectas B_1C_1 y B_2C_2 en los puntos E y F. Demostrar que $BECF$ es un paralelogramo.

II.116. El triángulo ABC tiene trazada la bisectriz del ángulo interior AD. Construyamos una tangente l al círculo circunscrito en el punto A. Demostrar que la recta trazada por D paralelamente a l es tangente a la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

II.117. En el triángulo ABC se traza una recta que corta los lados AC y BC en los puntos M y N de manera que $|MN| = |AM| + |BN|$. Demostrar quetodas las rectas de este género son tangentes a una misma circunferencia.

II.118. Demostrar que los puntos simétricos al centro del círculo circunscrito alrededor de un triángulo, respecto a los puntos medios

de sus medianas, se hallan en las alturas del triángulo.

II.119. Demostrar que si la altura de un triángulo es $\sqrt{2}$ veces mayor que el radio del círculo circunscrito, la recta que une los pies de las perpendiculares bajadas desde el pie de esta altura sobre los lados que la comprenden, pasa por el centro del círculo circunscrito.

II.120. Supongamos que ABC es un triángulo rectángulo ($\angle C = 90°$), CD, la altura, K, un punto del plano; además, $|AK| = |AC|$. Demostrar que el diámetro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABK, el cual pasa por el vértice A, es perpendicular a la recta DK.

II.121. Por el vértice A del triángulo ABC se traza una recta paralela a BC; en esta recta se toma el punto D de modo que $|AD| = |AC| + |AB|$; el segmento DB corta el lado AC en el punto E. Demostrar que la recta trazada por E paralelamente a BC, pasa por el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

II.122. Dos circunferencias pasan por el vértice de un ángulo y un punto que se halla en la bisectriz. Demostrar que los segmentos de los lados del ángulo, comprendidos entre las circunferencias, son iguales.

II.123. Se dan el triángulo ABC y el punto D. Las rectas AD, BD y CD se intersecan por segunda vez con la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC en los puntos A_1, B_1 y C_1, respectivamente. Examinemos dos circunferencias: la primera pasa por A y A_1

y la segunda, por B y B_1. Demostrar que los extremos de la cuerda común de estas dos circunferencias y los puntos C y C_1 se hallan en una circunferencia.

II.124. Por los vértices A, B y C del triángulo ABC están trazadas tres rectas paralelas l_1, l_2 y l_3. Demostrar que las rectas simétricas a l_1, l_2 y l_3, respectivamente, en cuanto a las bisectrices de los ángulos A, B y C, concurren en un punto dispuesto en la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC.

II.125. Demostrar que si M es un punto en el interior del triángulo ABC y las rectas AM, BM y CM pasan, respectivamente, por los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos BMC, CMA y AMB, M es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

II.126. En los lados BC, CA y AB del triángulo ABC se toman los puntos A_1, B_1 y C_1, respectivamente. Sea M un punto arbitrario del plano. La recta BM corta por segunda vez la circunferencia que pasa por A_1, B y C_1 en el punto B_2, la recta CM corta la circunferencia que pasa por A_1, B_1 y C, en el punto C_2, y la recta AM corta la circunferencia que pasa por A, B_1 y C_1, en el punto A_2. Demostrar que los puntos A_2, B_2, C_2 y M se encuentran en una circunferencia.

II.127. Sea A_1 un punto simétrico al punto de tangencia de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC con el lado BC, respecto a la bisectriz del ángulo A. De manera análoga se determinan los puntos B_1 y C_1. Demostrar que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 y la recta que

pasa por los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita del triángulo ABC, concurren en un punto.

II.128. Sean AA_1, BB_1, CC_1 las alturas del triángulo ABC. Una recta perpendicular a AB corta AC y A_1C_1 en los puntos K y L. Demostrar que el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo KLB_1 se halla en la recta BC.

II.129. Cuatro circunferencias iguales que se intersecan, pasan por el punto A. Demostrar que tres segmentos, los extremos de cada uno de los cuales difieren de A y son puntos de intersección de dos circunferencias (los lados opuestos de cada segmento no pertenecen a una circunferencia), concurren en un punto.

II.130. En el triángulo rectángulo ABC el ángulo C es recto, O es el centro de la circunferencia inscrita, M, el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con la hipotenusa; la circunferencia con el centro en M que pasa por O, se interseca con las bisectrices de los ángulos A y B en los puntos K y L distintos de O. Demostrar que K y L son centros de las circunferencias inscritas en los triángulos ACD y BCD, donde CD es la altura del triángulo ABC.

II.131. Demostrar que en el triángulo ABC la bisectriz del ángulo A, la línea media, paralela a AC, y la recta que une los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados CB y CA, se cortan en un punto.

II.132. Demostrar que tres rectas que pasan por los pies de dos alturas del triángulo, los extremos de dos de sus bisectrices y dos

puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con sus lados (todos los puntos se hallan en dos lados del triángulo), se cortan en un punto.

II.133. En los lados BC, CA y AB del triángulo ABC se toman los puntos A_1, B_1 y C_1, respectivamente, de tal manera que las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 se corten en un punto. Demostrar que si AA_1 es la bisectriz del ángulo $B_1A_1C_1$, entonces AA_1 es la altura del triángulo ABC.

II.134. En los lados BC, CA y AB del triángulo ABC se toman, respectivamente, los puntos A_1, B_1 y C_1 de manera que $\angle AA_1C = \angle BB_1A = \angle CC_1B$ (los ángulos se miden en un solo sentido). Demostrar que el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo limitado por las rectas AA_1, BB_1 y CC_1, coincide con el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC.

II.135. Los vértices del triángulo $A_1B_1C_1$ se hallan en las rectas BC, CA y AB (A_1 se encuentra en BC; B_1, en CA; C_1, en AB). Demostrar que si los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son semejantes (son homólogos los vértices A y A_1, B y B_1, C y C_1), el punto de intersección de las alturas del triángulo $A_1B_1C_1$ es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC. ¿Será cierta la afirmación inversa?

II.136. En cada lado de un triángulo se toman dos puntos de manera que los seis segmentos que unen cada punto con el vértice opuesto, son iguales entre sí. Demostrar que los puntos medios de estos seis segmentos se hallan en una circunferencia.

II.137. En los rayos AB y CB del triángulo ABC están trazados los segmentos $|AM| = |CN| = p$, donde p es el semiperímetro del triángulo (B se halla entre A y M, así como entre C y N). Sea K el punto de la circunferencia circunscrita alrededor de ABC, diametralmente opuesto a B. Demostrar que la perpendicular bajada desde K sobre MN pasa por el centro de la circunferencia inscrita.

II.138. Desde cierto punto de la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo equilátero ABC están trazadas las rectas paralelas a BC, CA y AB, que cortan CA, AB y BC en los puntos M, N y Q, respectivamente. Demostrar que M, N y Q se hallan en una recta.

II.139. Demostrar que tres rectas simétricas a una recta arbitraria que pasa por el punto de intersección de las alturas de un triángulo, respecto a los lados de éste, se cortan en un punto.

II.140. *Teorema de Leibniz.* Supongamos que M es un punto arbitrario del plano, G, el centro de masas del triángulo ABC. Entonces se cumple la igualdad $3|MG|^2 = |MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 - \frac{1}{3}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2)$.

II.141. Supongamos que ABC es un triángulo regular con el lado a, M, cierto punto del plano que se halla a la distancia d del centro del triángulo ABC. Demostrar que el área del triángulo, cuyos lados son iguales a los segmentos MA, MB y MC, se expresa por

medio de la fórmula $S = \frac{\sqrt{3}}{12} \mid a^2 - 3d^2 \mid$.

II.142. Se dan dos triángulos regulares: ABC y $A_1B_1C_1$. Hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que dos triángulos formados por los segmentos MA, MB, MC y MA_1, MB_1, MC_1, respectivamente, sean equivalentes.

II.143. En los rayos AB y CB del triángulo ABC se trazan los segmentos AK y CM iguales a AC. Demostrar que el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo BKM, es igual a la distancia entre los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita del triángulo ABC, mientras que la recta KM es perpendicular a la recta que une los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita.

II.144. Por un vértice del triángulo está trazada una recta perpendicular a la recta que une los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita. Demostrar que esta recta forma con los lados del triángulo dado dos triángulos, sin incluir el de partida, para los cuales la diferencia de los radios de las circunferencias circunscritas es igual a la distancia entre los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita del triángulo inicial.

II.145. Demostrar que si las longitudes de los lados del triángulo forman la progresión aritmética, entonces: a) el radio del círculo inscrito es igual a 1/3 de la altura bajada sobre el lado medio; b) la recta que une el centro de masas del triángulo con el centro del círculo inscrito, es paralela al lado medio; c) la

bisectriz del ángulo interior, opuesto al lado medio, es perpendicular a la recta que une los centros de los círculos inscrito y circunscrito; d) para todos los puntos de esta bisectriz, la suma de las distancias hasta los lados del triángulo es constante; e) el centro de la circunferencia inscrita, los puntos medios de los lados máximo y mínimo y el vértice del ángulo formado por éstos, se hallan en una circunferencia.

II.146. Sea K el punto medio del lado BC del triángulo ABC, M, el pie de la altura bajada sobre BC. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC tiene contacto con el lado BC en el punto D; la circunferencia exinscrita que entra en contacto con las prolongaciones de AB y AC y el lado BC, es tangente a BC en el punto E. La tangente común a estas circunferencias, distinta de los lados del triángulo, corta la circunferencia que pasa por K y M, en los puntos F y G. Demostrar que los puntos D, E, F y G se hallan en una circunferencia.

* * *

II.147. Demostrar que el centro de masas del triángulo, el punto de intersección de las alturas y el centro del círculo circunscrito se hallan en una recta (*recta de Euler*).

II.148. ¿Qué lados corta la recta de Euler en los triángulos acutángulo y obtusángulo?

II.149. Sea K un punto simétrico al centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$, respecto al lado BC. Demostrar que la recta de Euler en el triángulo ABC divide el segmento AK por la mitad.

II.150. Demostrar que en la recta de Euler en el triángulo ABC existe un punto P tal, que las distancias desde los centros de masas de los triángulos ABP, BCP, CAP, respectivamente, hasta los vértices C, A y B son iguales entre sí.

II.151. Sea P un punto interior al triángulo ABC, tal que los ángulos APB, BPC y CPA son iguales a $120°$ (suponemos que los ángulos del triángulo ABC son menores de $120°$). Demostrar que las rectas de Euler en los triángulos APB, BPC y CPA se cortan en un punto.

Observación. Al resolver este problema, se aprovecha el resultado del problema II.296.

II.152. Demostrar que la recta que une los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo dado, es la recta de Euler en el triángulo con vértices en los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo dado.

*
* *

II.153. Demostrar que los pies de las perpendiculares bajadas desde un punto arbitrario de la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo, sobre los lados de éste, se hallan en una recta (*recta de Simson*).

II.154. Demostrar que el ángulo comprendido entre las rectas de Simson que corresponden a dos puntos de una circunferencia, se mide por la mitad del arco entre estos puntos.

II.155. Sea M un punto de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC. La recta que pasa por M es perpendicular a

BC y corta por segunda vez la circunferencia en el punto N. Demostrar que la recta de Simson que corresponde al punto M, es paralela a la recta AN.

II.156. Demostrar que la proyección del lado AB del triángulo ABC sobre la recta de Simson que corresponde al punto M, es igual a la distancia entre las proyecciones del punto M sobre los lados AC y BC.

II.157. Sean AA_1, BB_1, CC_1 las alturas del triángulo ABC. Las rectas AA_1, BB_1, CC_1 cortan por segunda vez la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC en los puntos A_2, B_2, C_2, respectivamente. Las rectas de Simson que corresponden a los puntos A_2, B_2, C_2, forman el triángulo $A_3B_3C_3$ (A_3 es el punto de intersección de las rectas de Simson que corresponden a los puntos B_2 y C_2, etc.). Demostrar que los centros de masas de los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_3B_3C_3$ coinciden, mientras que las rectas A_2A_3, B_2B_3 y C_2C_3 se cortan en un punto.

II.158. Supongamos que A_1, B_1 y C_1 son puntos en la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, tales que $\smile AA_1 + \smile BB_1 + \smile CC_1 = 2k\pi$ (todos los arcos se miden en un sentido; k es un número entero). Demostrar que las rectas de Simson de los puntos A_1, B_1 y C_1 respecto al triángulo ABC se cortan en un punto.

II.159. Demostrar que la tangente a una parábola en su vértice es la recta de Simson en un triángulo formado al intersecar tres otras tangentes cualesquiera a la misma parábola.

* * *

II.160. Demostrar que los puntos medios de los lados del triángulo, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos de las alturas desde los vértices hasta el punto de su intersección se hallan en una circunferencia, o sea, en «la circunferencia de los nueve puntos» (*teorema de Euler*).

II.161. Supongamos que H es el punto de intersección de las alturas de un triángulo, D, el punto medio de cualquier lado, K, uno de los puntos de intersección de la recta HD con la circunferencia circunscrita (D se encuentra entre H y K). Demostrar que D es el punto medio del segmento HK.

II.162. Supongamos que M es el punto de intersección de las medianas de un triángulo, E, el pie de cualquier altura, F, uno de los puntos de intersección de la recta ME con la circunferencia circunscrita (M se encuentra entre E y F). Demostrar que $|FM| = 2|EM|$.

II.163. La altura bajada sobre el lado BC del triángulo ABC corta la circunferencia circunscrita en el punto A_1. Demostrar que la distancia desde el centro de la circunferencia de los nueve puntos hasta el lado BC es igual a $\frac{1}{4}|AA_1|$.

II.164. En el triángulo ABC, AA_1 es la altura, H, el punto de intersección de las alturas. Sea P un punto arbitrario de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, M, un punto en la recta HP, tal que

$|HP|\cdot|HM| = |HA_1|\cdot|HA|$ (H se halla en el segmento MP, si el triángulo ABC es acutángulo y fuera de éste, si es un triángulo obtusángulo). Demostrar que M se sitúa en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC.

II.165. En el triángulo ABC, BK es la altura, BL, la mediana, M y N, proyecciones de los puntos A y C sobre la bisectriz del ángulo B. Demostrar que los puntos K, L, M y N se hallan en una circunferencia, cuyo centro se dispone en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC.

II.166. Sean H el punto de intersección de las alturas de un triángulo, F, un punto arbitrario de la circunferencia circunscrita. Demostrar que la recta de Simson, la cual corresponde al punto F, pasa por uno de los puntos de intersección de la recta FH con la circunferencia de los nueve puntos (véanse los problemas II.153, II.159).

II.167. Supongamos que l es una recta arbitraria que pasa por el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC; A_1, B_1 y C_1 son las proyecciones de A, B y C sobre l. Tracemos por A_1 una recta perpendicular a BC, por B_1, otra recta perpendicular a AC y por C_1, la tercera recta perpendicular a AB. Demostrar que estas tres rectas se intersecan en un punto dispuesto en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC.

II.168. En el triángulo ABC, AA_1, BB_1 y CC_1 son sus alturas. Demostrar que las rectas de Euler de los triángulos AB_1C_1, A_1BC_1,

A_1B_1C se cortan en un punto P tal de la circunferencia de los nueve puntos, para el cual uno de los segmentos PA_1, PB_1, PC_1 es igual a la suma de otros dos segmentos (*problema de Victor Thebault*).

II.169. Demostrar que tres circunferencias, cada una de las cuales pasa por el vértice de un triángulo, por el pie de la altura, bajada desde este vértice, y es tangente al radio del círculo circunscrito alrededor del triángulo, trazado hacia este vértice, se cortan en dos puntos dispuestos en la recta de Euler del triángulo dado.

II.170. Examinemos tres circunferencias, cada una de las cuales pasa por un vértice de un triángulo y los pies de dos bisectrices, interior y exterior, que salen de este vértice (semejantes circunferencias llevan el nombre de *circunferencias de Apolonio*). Demostrar que: a) estas tres circunferencias se intersecan en dos puntos (M_1 y M_2); b) la recta M_1M_2 pasa por el centro del círculo circunscrito alrededor del triángulo dado; c) los pies de las perpendiculares bajadas desde los puntos M_1 y M_2 sobre los lados del triángulo sirven como vértices de dos triángulos regulares.

II.171. Una recta, simétrica a la mediana de un triángulo con respecto a la bisectriz del mismo ángulo, del cual parte la mediana, se llama *simediana*. Supongamos que la simediana que parte del vértice B del triángulo ABC, corta AC en el punto K. Demostrar que $|AK|:|KC| = |AB|^2:|BC|^2$.

II.172. Supongamos que D es un punto arbitrario tomado en el lado BC, E y F son

puntos en AC y AB tales, que DE es paralela a AB y DF es paralela a AC. Una circunferencia que pasa por D, E y F, corta por segunda vez BC, CA y AB en los puntos D_1, E_1 y F_1, respectivamente. Sean M y N los puntos de intersección de DE y E_1D_1, DF y D_1E_1. Demostrar que M y N se hallan en la simediana que parte del vértice A. Además, si D coincide con el pie de la simediana, la circunferencia que pasa por D, E y F, entra en contacto con el lado BC. (Esta circunferencia se llama *circunferencia de Tucker*).

II.173. Demostrar que las cuerdas comunes de la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo dado y de las circunferencias de Apolonio son simedianas de este triángulo (véanse los problemas II.170, II.171).

* * *

II.174. En el trapecio $ABCD$, el lado CD es perpendicular a las bases AD y BC. Una circunferencia con diámetro AB corta AD en el punto P (P difiere de A). La tangente a la circunferencia en el punto P corta CD en el punto M. A partir de M, hacia la circunferencia, está trazada una segunda tangente que tiene contacto con ella en el punto Q. Demostrar que la recta BQ parte CD por la mitad.

II.175. Sean M y N las proyecciones del punto de intersección de las alturas del triángulo ABC sobre las bisectrices de los ángulos interior y exterior B. Demostrar que la recta MN parte el lado AC por la mitad.

II.176. Se da una circunferencia y dos puntos A y B en ésta. Las tangentes a la circunfe-

rencia que pasan por A y B, se cortan en el punto C. La circunferencia que pasa por C, es tangente a la recta AB en el punto B y se interseca por segunda vez con la dada en el punto M. Demostrar que la recta AM divide el segmento CB por la mitad.

II.177. Desde el punto A, dispuesto fuera de una circunferencia, están trazadas a ésta dos tangentes AM y AN (M y N son puntos de tangencia) y una secante que corta la circunferencia en los puntos K y L. Tracemos una recta arbitraria l paralela a AM. Supongamos que KM y LM cortan l en los puntos P y Q. Demostrar que la recta MN divide el segmento PQ por la mitad.

II.178. El triángulo ABC tiene inscrita una circunferencia, cuyo diámetro pasa por el punto de tangencia con el lado BC y corta la cuerda que une los otros dos puntos de tangencia, en el punto N. Demostrar que AN parte BC por la mitad.

II.179. El triángulo ABC tiene inscrita una circunferencia. Supongamos que M es el punto de tangencia de la circunferencia con el lado AC, MK es el diámetro. La recta BK corta AC en el punto N. Demostrar que $|AM| = |NC|$.

II.180. El triángulo ABC tiene inscrita una circunferencia, M es el punto de tangencia que tiene la circunferencia con el lado BC, MK es el diámetro. La recta AK corta la circunferencia en el punto P. Demostrar que la tangente a la circunferencia en el punto P divide el lado BC por la mitad.

II.181. La recta l es tangente a la circun-

ferencia en el punto A; supongamos que CD es la cuerda de una circunferencia, paralela a l, B, un punto arbitrario tomado en la recta l. Las rectas CB y DB cortan por segunda vez la circunferencia en los puntos L y K. Demostrar que la recta LK parte el segmento AB por la mitad.

II.182. Se dan dos circunferencias que se intersecan. Sea A uno de los puntos de su intersección. Desde un punto arbitrario que se halla en la prolongación de la cuerda común de las circunferencias dadas, están trazadas hacia una de éstas dos tangentes que tienen contacto con ésta en los puntos M y N. Sean P y Q los puntos de intersección (distintos de A) de las rectas MA y NA, respectivamente, con la segunda circunferencia. Demostrar que la recta MN parte el segmento PQ por la mitad.

II.183. La altura BD del triángulo ABC sirve de diámetro de una circunferencia que corta los lados AB y BC en los puntos K y L, respectivamente. Las rectas tangentes a la circunferencia en los puntos K y L, concurren en el punto M. Demostrar que la recta BM divide el lado AC por la mitad.

II.184. La recta l es perpendicular al segmento AB y pasa por B. La circunferencia con el centro situado en l pasa por A y corta l en los puntos C y D y las tangentes a la circunferencia en los puntos A y C se intersecan en N. Demostrar que la recta DN divide el segmento AB por la mitad.

II.185. El triángulo ABC tiene circunscrita una circunferencia. Supongamos que N es el punto de intersección de las tangentes a la

circunferencia que pasan por los puntos B y C, M, un punto tal de la circunferencia que $AM \parallel BC$, K, el punto de intersección de MN con la circunferencia. Demostrar que KA divide BC por la mitad.

II.186. Sea A la proyección del centro de una circunferencia dada sobre la recta l. En esta recta se toman dos puntos más B y C de manera que $|AB| = |AC|$. Por B y C están trazadas dos secantes arbitrarias que cortan la circunferencia en los puntos P, Q y M, N, respectivamente. Supongamos que las rectas NP y MQ cortan la recta l en los puntos R y S. Demostrar que $|RA| = |AS|$.

II.187. En el triángulo ABC, A_1, B_1, C_1 son los puntos medios de los lados BC, CA y AB, K y L, los pies de las perpendiculares bajadas desde los vértices B y C sobre las rectas A_1C_1 y A_1B_1, respectivamente, O, el centro de la circunferencia de los nueve puntos. Demostrar que la recta A_1O parte el segmento KL por la mitad.

* * *

II.188. Sean los puntos A_1, B_1, C_1 simétricos a cierto punto P, respectivamente, con respecto a los lados BC, CA y AB del triángulo ABC. Demostrar que: a) las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos A_1BC, AB_1C, ABC_1 tienen un punto común; b) las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos A_1B_1C, A_1BC_1, AB_1C_1 tienen un punto común.

II.189. Supongamos que AB es el diámetro de un semicírculo, M, un punto tomado en el

diámetro AB. Los puntos C, D, E y F se hallan en la semicircunferencia de manera que $\angle AMD = \angle EMB$, $\angle CMA = \angle FMB$. Sea P el punto de intersección de las rectas CD y EF. Demostrar que la recta PM es perpendicular a AB.

II.190. Una perpendicular levantada hacia el lado AB del triángulo ABC en su punto medio D, corta la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, en el punto E (C y E se encuentran a un lado de AB); F es la proyección de E sobre AC. Demostrar que la recta DF divide el perímetro del triángulo ABC por la mitad y que semejantes tres rectas construidas para cada lado del triángulo, se intersecan en un punto.

II.191. Demostrar que la recta que divide el perímetro y el área de un triángulo en razón igual, pasa por el centro de la circunferencia inscrita.

II.192. Demostrar que tres rectas que pasan por los vértices de un triángulo y dividen su perímetro por la mitad, se cortan en el punto N (*punto de Nagell*). Supongamos que M es el centro de masas del triángulo, I, el centro de la circunferencia inscrita, S, el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo con vértices en los puntos medios de los lados del triángulo dado. Demostrar que los puntos N, M, I y S se hallan en una recta, siendo que $|MN| = 2|IM|$, $|IS| = |SN|$.

*
* *

II.193. Designemos con a, b y c los lados del triángulo ABC; $a + b + c = 2p$; G es el

punto de intersección de sus medianas, O, I, I_a, respectivamente, son los centros de los círculos circunscrito, inscrito y exinscrito (el círculo exinscrito tiene como tangentes el lado BC y las prolongaciones de los lados AB y AC), R, r, r_a son sus radios. Demostrar la validez de las relaciones siguientes:

a) $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$;

b) $|OG|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$;

c) $|IG|^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$;

d) $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$ (*Euler*);

e) $|OI_a|^2 = R^2 + 2Rr_a$;

f) $|II_a|^2 = 4R(r_a - r)$.

II.194. Sean BB_1 y CC_1 las bisectrices de los ángulos B y C del triángulo ABC. Demostrar (usando las designaciones del problema anterior) que $|B_1C_1| = \frac{abc}{(b+a)(c+a)R} \times$ $\times |OI_a|$.

II.195. Demostrar que los puntos simétricos a los centros de las circunferencias exinscritas con respecto al centro de la circunferencia circunscrita, se hallan en la circunferencia, concéntrica con respecto a la circunferencia inscrita, cuyo radio es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita.

II.196. Se da el triángulo ABC. Demostrar que la suma de las áreas de tres triángulos, los vértices de cada uno de los cuales son tres puntos de tangencia de la circunferencia exinscrita con el lado correspondiente del triángulo

ABC y las prolongaciones de otros dos lados, es igual al área duplicada del triángulo ABC, sumada con el área del triángulo con los vértices dispuestos en los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en $\triangle ABC$.

II.197. Hallar la suma de los cuadrados de las distancias desde los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en un triángulo dado, con los lados de éste, hasta el centro de la circunferencia circunscrita, si el radio de la circunferencia inscrita es igual a r y el de la circunscrita, a R.

II.198. Por los pies de las bisectrices del triángulo ABC está trazada una circunferencia. Demostrar que una de las cuerdas formadas al intersecar esta circunferencia los lados del triángulo, es igual a la suma de las otras dos.

II.199. Supongamos que AA_1, BB_1 y CC_1 son las bisectrices del triángulo ABC, L, el punto de intersección de las rectas AA_1 y B_1C_1, K, el punto de intersección de CC_1 con A_1B_1. Demostrar que BB_1 es la bisectriz del ángulo LBK.

II.200. En los lados AB y BC del triángulo ABC se toman los puntos K y L de manera que $|AK| = |KL| = |LC|$. Por el punto de intersección de las rectas AL y CK se traza una recta paralela a la bisectriz del ángulo B que corta la recta AB en el punto M. Demostrar que $|AM| = |BC|$.

II.201. En el triángulo ABC, la bisectriz del ángulo B corta la recta que pasa por el punto medio de AC y el punto medio de la altura, bajada sobre AC, en el punto M; N es

el punto medio de la bisectriz del ángulo B. Demostrar que la bisectriz del ángulo C también es la bisectriz del ángulo MCN.

II.202. a) Demostrar que si en un triángulo dos bisectrices son iguales, éste es un triángulo isósceles (*teorema de Steiner*).

b) Demostrar que si en el triángulo ABC las bisectrices de los ángulos adyacentes a los ángulos A y C son iguales entre sí y ambas se sitúan simultáneamente en el interior o fuera del ángulo ABC, entonces $|AB| = |BC|$. ¿Será cierto que a partir de la igualdad de dos bisectrices exteriores de un triángulo se deduce que éste es isósceles?

II.203. Un triángulo tiene en su interior otro triángulo, cuyos vertices son los pies de las bisectrices del primero. Se sabe que el triángulo interior es isósceles. ¿Es cierta la afirmación de que también el primer triángulo es isósceles?

* * *

II.204. Sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito. Designemos con K el punto de intersección de AC y BF y con L, el punto de intersección de CE y FD. Demostrar que las diagonales AD, BE y la recta KL se cortan en un punto (*teorema de Pascal*).

II.205. Se dan el triángulo ABC y el punto M. La recta que pasa por M, corta las rectas AB, BC y CA, respectivamente, en los puntos C_1, A_1 y B_1. Las rectas AM, BM y CM cortan la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC en los puntos A_2, B_2 y C_2, respec-

tivamente. Demostrar que las rectas A_1A_2, B_1B_2 y C_1C_2 se intersecan en un punto dispuesto en la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$.

II.206. Por el punto de intersección de las alturas de un triángulo están trazadas dos rectas mutuamente perpendiculares. Demostrar que los puntos medios de los segmentos cortados por estas rectas en los lados del triángulo (más exactamente, en las rectas que forman el triángulo), se hallan en una recta.

* * *

II.207. Se dan el triángulo ABC y el punto arbitrario P. Los pies de las perpendiculares bajadas desde P sobre los lados del triángulo ABC, sirven en calidad de los vértices del triángulo $A_1B_1C_1$. Como vértices del triángulo $A_2B_2C_2$ sirven los puntos de intersección de las rectas AP, BP y CP con la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, distintos de los puntos A, B y C. Demostrar que los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son semejantes. ¿Cuántos puntos P habrá para el triángulo escaleno ABC para que los triángulos correspondientes $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ sean semejantes al triángulo ABC?

II.208. Sean A_1, B_1, C_1 los pies de las perpendiculares bajadas desde el punto arbitrario M sobre los lados BC, CA, AB, respectivamente, del triángulo ABC. Demostrar que tres rectas que pasan por los puntos medios de los segmentos B_1C_1 y MA, C_1A_1 y MB, A_1B_1 y MC se intersecan en un punto.

II.209. Supongamos que S es el área de un triángulo dado; R, el radio del círculo circunscrito alrededor de éste. Supongamos, luego, que S_1 es el área del triángulo, cuyos vértices son los pies de las perpendiculares bajadas sobre los lados del triángulo dado desde un punto alejado respecto del centro del círculo circunscrito a una distancia d. Demostrar que $S_1 = \frac{S}{4}\left|1 - \frac{d^2}{R^2}\right|$ (*teorema de Euler*).

II.210. Demostrar que si A, B, C y D son puntos arbitrarios de un plano, entonces cuatro circunferencias, cada una de las cuales pasa por tres puntos: los puntos medios de los segmentos AB, AC y AD; BA, BC y BD; CA, CB y CD; DA, DB y DC, tienen un punto común.

II.211. Sea ABC un triángulo, D, un punto arbitrario del plano. Llamaremos *triángulo de pedal del punto D respecto al triángulo ABC* al triángulo formado por los pies de las perpendiculares bajadas desde D sobre los lados del triángulo ABC, y a la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo de pedal, *circunferencia de pedal.* Designemos con D_1 el punto en que se cortan las rectas simétricas a las rectas AD, BD y CD en cuanto a las bisectrices de los ángulos A, B y C (respectivamente) del triángulo ABC. Demostrar que las circunferencias de pedal de los puntos D y D_1 coinciden.

II.212. Examinemos cuatro puntos de un plano, entre los cuales no hay tres que se hallen en una recta. Demostrar que cuatro circunferencias de pedal, cada una de las cuales co-

rresponde a uno de los puntos examinados respecto al triángulo, cuyos vértices son los tres puntos restantes, tienen un punto común.

II.213. Una recta que pasa por el centro de una circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, corta AB y AC en los puntos C_1 y B_1, respectivamente. Demostrar que las circunferencias construidas sobre BB_1 y CC_1 como sobre diámetros, se cortan en dos puntos, uno de los cuales se halla sobre la circunferencia circunscrita alrededor de ABC, mientras que el otro, sobre la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC.

§ 5. Cuadrilátero

II.214. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito y AB, su diámetro. Demostrar que las proyecciones de los lados AD y BC sobre la recta CD son iguales.

II.215. Supongamos que $ABCD$ es un cuadrilátero convexo, O, el punto de intersección de sus diagonales; E, F y G, las proyecciones de B, C, y O sobre AD. Demostrar que el área del cuadrilátero es igual a $\frac{|AD|\cdot|BE|\cdot|CF|}{2|OG|}$.

II.216. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Examinemos cuatro circunferencias, cada una de las cuales tiene como tangentes los tres lados de este cuadrilátero.

a) Demostrar que los centros de estas circunferencias se hallan en una circunferencia.

b) Sean r_1, r_2, r_3, r_4 los radios de estas circunferencias (r_1 no tiene contacto con el lado DC, de manera análoga r_2 no tiene con-

tacto con el lado DA, r_3 no lo tiene con AB, r_4, con BC). Demostrar que $\frac{|AB|}{r_1} + \frac{|CD|}{r_3} = \frac{|BC|}{r_2} + \frac{|AD|}{r_4}$.

II.217. Demostrar que para el área S de un cuadrilátero inscrito es válida la fórmula $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ (p es el semiperímetro, a, b, c, d son los lados).

II.218. Supongamos que 2φ es la suma de dos ángulos opuestos de un cuadrilátero circunscrito, a, b, c y d son sus lados, S, el área. Demostrar que $S = \sqrt{abcd}$ sen φ.

II.219. En los lados AB y CD del cuadrilátero convexo $ABCD$ se toman los puntos M y N que dividen aquéllos en razón igual (contando a partir de los vértices A y C). Estos puntos están unidos con todos los vértices del cuadrilátero, a consecuencia de los cual $ABCD$ está dividido en seis triángulos y un cuadrilátero. Demostrar que el área del cuadrilátero obtenido es igual a la suma de las áreas de dos triángulos adyacentes a los lados BC y AD.

II.220. En una circunferencia están trazados el diámetro AB y la cuerda CD que no lo corta. Sean E y F los pies de las perpendiculares bajadas desde los puntos A y B sobre la recta CD. Demostrar que el área del cuadrilátero $AEFB$ es igual a la suma de las áreas de los triángulos ACB y ADB.

II.221. Se da el cuadrilátero convexo Q_1. Las rectas perpendiculares a sus lados, las cuales pasan por los puntos medios de los lados, forman el cuadrilátero Q_2. Precisamente de la misma manera, para el cuadrilátero Q_2

está formado el cuadrilátero Q_3. Demostrar que el cuadrilátero Q_3 es semejante al cuadrilátero inicial Q_1.

II.222. En los lados opuestos BC y DA de un cuadrilátero convexo se toman los puntos M y N de tal manera que $|BM| : |MC| = |AN| : |ND| = |AB| : |CD|$. Demostrar que la recta MN es paralela a la bisectriz del ángulo formado por los lados AB y CD.

II.223. Las diagonales dividen un cuadrilátero convexo en cuatro triángulos. Los radios de las circunferencias inscritas en estos triángulos son iguales. Demostrar que el cuadrilátero dado es un rombo.

II.224. Las diagonales de un cuadrilátero lo parten en cuatro triángulos de perímetro igual. Demostrar que el cuadrilátero dado es un rombo.

II.225. Se sabe que en el cuadrilátero $ABCD$ los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC, BCD, CDA, DAB son iguales. Demostrar que $ABCD$ es un rectángulo.

II.226. En una circunferencia está inscrito el cuadrilátero $ABCD$. Supongamos que M es el punto de intersección de las tangentes a la circunferencia que pasan por A y C, N es el punto de intersección de las tangentes trazadas por B y D, K es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos A y C del cuadrilátero, L es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos B y D. Demostrar que, si se cumple una de las afirmaciones: a) M pertenece a la recta BD, b) N pertenece a la recta AC, c) K se halla en BD, d) L se halla en

AC, entonces son ciertas las demás tres afirmaciones.

II.227. Demostrar que las cuatro rectas, cada una de las cuales pasa por los pies de dos perpendiculares bajadas desde el vértice de un cuadrilátero inscrito sobre los lados que no comprenden dicho vértice, concurren en un punto.

II.228. Supongamos que AB y CD son dos cuerdas de una circunferencia, M, el punto de intersección de las perpendiculares levantadas hacia AB en el punto A y hacia CD en el punto C, N es el punto de intersección de las perpendiculares levantadas hacia AB y CD en los puntos B y D. Demostrar que la recta MN pasa por el punto de intersección de BC y AD.

II.229. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Por los puntos A y B pasa una circunferencia de radio R. Otra circunferencia del mismo radio pasa por los puntos B y C. Sea M el segundo punto de intersección de estas circunferencias. Demostrar que los radios de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos AMD y CMD son iguales a R.

II.230. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Una circunferencia es tangente a las rectas AB y AD y corta BD en los puntos M y N. Demostrar que existe una circunferencia que pasa por M y N y tiene como tangentes las rectas CB y CD.

II.231. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Sobre la diagonal AC, como sobre diámetro, construyamos una circunferencia y designemos con M y N los puntos de intersección de las rectas AB y AD con esta circunferencia. Demostrar

que las rectas BD, MN y la tangente a la circunferencia en el punto C se intersecan en un punto.

II.232. El cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en una circunferencia; O_1, O_2, O_3, O_4 son los centros de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC, BCD, CDA, DAB, y H_1, H_2, H_3, H_4 son los puntos de intersección de las alturas de los mismos triángulos. Demostrar que $O_1O_2O_3O_4$ es un rectángulo y el cuadrilátero $H_1H_2H_3H_4$ es igual al cuadrilátero $ABCD$.

II.233. Se dan el triángulo ABC y el punto arbitrario D del plano. Demostrar que los puntos de intersección de las alturas de los triángulos ABD, BCD, CAD son los vértices de un triángulo equivalente al dado.

II.234. Demostrar que, si en un cuadrilátero se puede inscribir una circunferencia, entonces: a) las circunferencias inscritas en dos triángulos, en los cuales el cuadrilátero dado se divide por una diagonal, son tangentes una a otra; b) los puntos de tangencia de estas dos circunferencias con los lados del cuadrilátero son los vértices del cuadrilátero inscrito.

II.235. Demostrar que, si $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito, la suma de los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC y ACD es igual a la suma de los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos BCD y BDA.

* * *

II.236. *Teorema de Bretschneider* (teorema de los cosenos para el cuadrilátero). Sean a, b, c, d los lados sucesivos de un cuadrilátero: m

y n, sus diagonales; A y C, dos ángulos opuestos. Entonces se cumple la relación

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(A + C).$$

II.237. *Teorema de Tolomeo.* Sean a, b, c, d los lados sucesivos de un cuadrilátero inscrito y m y n, sus diagonales. Demostrar que $mn = ac + bd$.

II.238. Demostrar que, si ABC es un triángulo regular, M, un punto arbitrario del plano que no se encuentra en la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, existirá un triángulo, cuyos lados son iguales a $|MA|$, $|MB|$ y $|MC|$ (*teorema de Pompeiu*). Hallar el ángulo de este triángulo que se sitúa frente al lado igual a $|MB|$, si $\angle AMC = \alpha$.

II.239. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito. Cuatro circunferencias α, β, γ y δ son tangentes a la circunferencia circunscrita alrededor del cuadrilátero $ABCD$ en los puntos A, B, C y D, respectivamente. Designemos con $t_{\alpha\beta}$ un segmento de la tangente a las circunferencias α y β, además, $t_{\alpha\beta}$ es un segmento de la tangente exterior común, si α y β tienen puntos de tangencia con la circunferencia dada de una manera igual (por dentro o por fuera), y es un segmento de la tangente interior común, si α y σ son tangentes a la circunferencia dada de maneras distintas (en forma análoga se determinan las magnitudes $t_{\beta\gamma}$, $t_{\alpha\delta}$, etc.). Demostrar que

$$t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta} \qquad (*)$$

(*teorema generalizado de Tolomeo*).

II.240. Sean α, β, γ y δ cuatro circunferencias en el plano. Demostrar que, si se cumple la relación

$$t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta}, \qquad (*)$$

donde $t_{\alpha\beta}$, etc. son segmentos de las tangentes exteriores o interiores comunes a las circunferencias α y β, etc.; además, para cualesquiera tres circunferencias se toman tres tangentes exteriores o una exterior y dos interiores, entonces las circunferencias α, β, γ y δ son tangentes a una circunferencia.

*
* *

II.241. Las prolongaciones de los lados AB y DC de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se cortan en el punto K y las prolongaciones de los lados AD y BC, en el punto L; además, los segmentos BL y DK se intersecan. Demostrar que, si se cumple una de las tres relaciones $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$, $|BK| + |BL| = |DK| + |DL|$, $|AK| + |CL| = |AL| + |CK|$, se cumplen también las dos otras.

II.242. Las prolongaciones de los lados AB y DC de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se cortan en el punto K y las prolongaciones de los lados AD y BC, en el punto L; además, los segmentos BL y DK se intersecan. Demostrar que, si se cumple una de las tres relaciones $|AD| + |DC| = |AB| + |CB|$, $|AK| + |CK| = |AL| + |CL|$, $|BK| + |DK| = |BL| + |DL|$, se cumplen también las dos otras.

II.243. Demostrar que, si existe una circunferencia que tiene como tangentes las rectas AB, BC, CD y DA, su centro y los puntos medios de AC y BD se hallan en una recta.

II.244. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito. La perpendicular respecto a BA, levantada desde el punto A, corta la recta CD en el punto M, la perpendicular hacia DA, levantada desde el punto A, corta la recta BC en el punto N. Demostrar que MN pasa por el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del cuadrilátero $ABCD$.

II.245. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito, E, un punto arbitrario de la recta AB, F, un punto arbitrario de la recta DC. La recta AF corta la circunferencia en el punto M, la recta DE, en el punto N. Demostrar que las rectas BC, EF y MN se intersecan en un punto o son paralelas.

II.246. Demostrar que los pies de las perpendiculares bajadas desde el punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero inscrito en sus lados, son vértices del cuadrilátero, en el cual se puede inscribir una circunferencia. Hallar el radio de esta circunferencia, si las diagonales del cuadrilátero inscrito son perpendiculares, el radio de la circunferencia dada es R y la distancia desde su centro hasta el punto de intersección de las diagonales es d.

II.247. Las diagonales de un cuadrilátero inscrito son perpendiculares. Demostrar que los puntos medios de sus lados y los pies de las perpendiculares bajadas sobre los lados desde el punto de intersección de las diagonales se encuentran en una circunferencia. Hallar el

radio de esta circunferencia, si el de la circunferencia dada es R y la distancia desde su centro hasta el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero es d.

II.248. Demostrar que, si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia con radio R y simultáneamente está circunscrito alrededor de una circunferencia con radio r, siendo d la distancia entre centros de estas circunferencias, entonces se cumple la relación $\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=1/r^2$; al mismo tiempo existe un número infinitamente grande de cuadriláteros simultáneamente inscritos en una circunferencia mayor y circunscritos alrededor de una circunferencia menor (como uno de los vértices puede tomarse cualquier punto de la circunferencia mayor).

II.249. Un cuadrilátero convexo está dividido por las diagonales en cuatro triángulos. Demostrar que la recta que une los centros de masas de dos triángulos opuestos, es perpendicular a la que une los puntos de intersección de las alturas de los demás dos triángulos.

II.250. Supongamos que $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito, M y N son los puntos medios de AC y BD. Demostrar que, si BD es la bisectriz del ángulo ANC, también AC es la bisectriz del ángulo BMD.

II.251. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito. Los lados opuestos AB y CD, al ser prolongados, se cortan en el punto K y los lados BC y AD, en el punto L. Demostrar que las bisectrices de los ángulos BKC y BLA son perpendiculares y se intersecan en la recta que une

los puntos medios de los lados AC y BD.

II.252. Las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares. Demostrar que cuatro rectas, cada una de las cuales une uno de los vértices del cuadrilátero y el centro de la circunferencia que pasa por este vértice y dos vértices adyacentes a éste del cuadrilátero, se cortan en un punto.

II.253. Sean P, Q y M, respectivamente, los puntos de intersección de las diagonales de un cuadrilátero inscrito y de las prolongaciones de sus lados opuestos. Demostrar que el punto de intersección de las alturas del triángulo PQM coincide con el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del cuadrilátero dado (*teorema de Brocard*).

II.254. Sea $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito, K, el punto de intersección de las rectas AB y CD, L, el punto de intersección de las rectas AD y BC. Demostrar que el punto de intersección de las alturas del triángulo formado por las rectas KL, AC y BD coincide con el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero $ABCD$.

II.255. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo; $\angle ABC = \angle ADC$; M y N son los pies de las perpendiculares bajadas desde A sobre BC y CD, respectivamente, K, el punto de intersección de las rectas MD y NB. Demostrar que las rectas AK y MN son perpendiculares.

*
* *

II.256. Demostrar que cuatro circunferencias circunscritas alrededor de cuatro triángulos formados por cuatro rectas que se intersecan y

pertenecen a un plano, tienen un punto común (*punto de Michell*).

II.257. Demostrar que los centros de cuatro circunferencias circunscritas alrededor de cuatro triángulos formados por cuatro rectas que se intersecan, pertenecientes a un plano, se hallan en una circunferencia.

II.258. Se dan cuatro rectas que se intersecan dos a dos. Sea M el punto de Michell correspondiente a estas rectas (véase el problema II.256). Demostrar que, si cuatro de los seis puntos de intersección dos a dos de las rectas dadas se hallan en la circunferencia con el centro en O, entonces la recta que pasa por dos puntos restantes, contiene el punto M y es perpendicular a la recta OM.

II.259. Cuatro rectas que se intersecan dos a dos, forman cuatro triángulos. Demostrar que, si una recta es paralela a la recta de Euler (véase el problema II.147) del triángulo formado por tres otras rectas, tiene esta misma propiedad cualquier otra recta.

II.260. Viene dado el triángulo ABC. Una recta corta las rectas AB, BC y CA, respectivamente, en los puntos D, E y F. Las rectas DC, AE y BF forman el triángulo KLM. Demostrar que las circunferencias construidas sobre DC, AE y BF usándolas como diámetros, concurren en dos puntos P y N (se supone que estas circunferencias se intersecan dos a dos); además, la recta PN pasa por el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo KLM, así como por los puntos de intersección de las alturas de los triángulos ABC, BDE, DAF y CEF.

II.261. Viene dado el triángulo ABC. Una recta arbitraria corta las rectas AB, BC y CA, respectivamente, en los puntos D, E y F. Demostrar que los puntos de intersección de las alturas de los triángulos ABC, BDE, DAF y CEF se hallan en una recta perpendicular a la recta de Gauss (véase el problema II.53).

II.262. Demostrar que las mediatrices levantadas hacia los segmentos que unen los puntos de intersección de las alturas y los centros de las circunferencias circunscritas de cuatro triángulos formados por cuatro rectas arbitrarias de un plano, concurren en un punto (*punto de Hervé*).

II.263. Examinemos dieciséis puntos que son centros de todas las posibles circunferencias inscritas y exinscritas para cuatro triángulos formados por cuatro rectas que se intersecan, pertenecientes a un plano. Demostrar que estos dieciséis puntos pueden dividirse en cuatro cuaternas empleando dos procedimientos de manera que cada cuaterna quedará en una circunferencia. Al emplear el primer procedimiento, los centros de estas circunferencias quedarán en una recta y al hacer uso del segundo, en otra recta. Estas rectas son perpendiculares y se intersecan en el punto de Michell que es el punto común de las circunferencias circunscritas alrededor de cuatro triángulos.

§ 6. Circunferencias y tangentes. Teorema de Feuerbach

II.264. En una recta se sitúan sucesivamente los puntos A, B, C y D de manera que $|BC| = 2|AB|$, $|CD| = |AC|$. Una cir-

cunferencia pasa por los puntos A y C, mientras que la otra, por los puntos B y D. Demostrar que la cuerda común de estas circunferencias divide el segmento AC por la mitad.

II.265. Sea B un punto del segmento AC. La figura limitada por los arcos de tres semicircunferencias con diámetros AB, BC y CA, dispuestas a un lado de la recta AC, lleva el nombre la *cuchilla de zapatero* o *arbelos de Arquímedes.* Demostrar que los radios de dos circunferencias, cada una de las cuales es tangente a dos semicircunferencias y la recta que es perpendicular a AC y pasa por B, son iguales entre sí (*problema de Arquímedes*).

II.266. Cada una de tres circunferencias pasa por dos puntos dados de un plano. Sean O_1, O_2, O_3 sus centros. La recta que pasa por uno de los puntos común a todas las tres circunferencias, las corta por segunda vez en los puntos A_1, A_2, A_3, respectivamente. Demostrar que $|A_1A_2| : |A_2A_3| = |O_1O_2| : : |O_2O_3|$.

II.267. Se dan dos circunferencias que no se intersecan. Demostrar que cuatro puntos de tangencia de las tangentes exteriores comunes a estas circunferencias se hallan en una circunferencia; de la misma manera, cuatro puntos de tangencia de las tangentes interiores comunes se hallan en una circunferencia y cuatro puntos de intersección de las tangentes interiores comunes con las tangentes exteriores comunes se hallan en una tercera circunferencia; además, las tres circunferencias son concéntricas.

II.268. Se dan dos circunferencias que no se intersecan. Una tercera circunferencia es

tangente exterior a ambas y tiene el centro en una recta que pasa por los centros de las dadas. Demostrar que la tercera circunferencia corta las tangentes interiores comunes a las circunferencias dadas en cuatro puntos que forman un cuadrilátero, cuyos dos lados son paralelos a las tangentes exteriores comunes a las circunferencias dadas.

II.269. Se dan dos circunferencias. Por el centro de una de éstas está trazada una recta que corta esta circunferencia en los puntos A y C, intersecando la otra circunferencia en los puntos B y D. Demostrar que, si $|AB| : |BC| = |AD| : |DC|$, las circunferencias son perpendiculares, es decir, el ángulo entre las tangentes a éstas en el punto de su intersección es recto.

II.270. Los puntos A, B, C y D se hallan en una circunferencia o en una recta; por los puntos A y B, B y C, C y D, D y A están trazadas cuatro circunferencias. Designemos con B_1, C_1, D_1 y A_1 los puntos de intersección (distintos de A, B, C y D) de las circunferencias primera y segunda, segunda y tercera, tercera y cuarta, cuarta y primera, respectivamente. Demostrar que los puntos A_1, B_1, C_1 y D_1 se encuentran en una circunferencia (o una recta).

II.271 Supongamos que a partir del punto A, tomado fuera de una circunferencia, están trazadas dos tangentes AM y AN a la circunferencia (M y N son dos puntos de tangencia) y dos secantes y que P y Q son los puntos de intersección de la circunferencia con la primera secante, mientras que K y L son

los puntos de intersección con la segunda. Demostrar que las rectas PK, QL y MN se cortan en un punto o son paralelas.

Obtener de aquí el método de construcción de una tangente a la circunferencia dada que pasa por el punto dado, usando una regla.

II.272. Se da una circunferencia con el centro O y el punto A. Sea B un punto arbitrario de la circunferencia. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las tangentes a la circunferencia en el punto B con la recta que pasa por O perpendicularmente a AB.

II.273. Se dan una circunferencia y dos puntos A y B en ésta. Sea N un punto arbitrario de la recta AB. Construyamos dos circunferencias, cada una de las cuales pasa por el punto N y es tangente a la dada: una, en el punto A y la otra, en el punto B. Designemos con M el segundo punto de intersección de estas circunferencias. Hallar el lugar geométrico de puntos M.

II.274. Por el punto fijo A, situado en el interior de una circunferencia, están trazadas dos cuerdas arbitrarias PQ y KL. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas PK y QL.

II.275. Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Una recta arbitraria pasa por B y corta por segunda vez la primera circunferencia en el punto C y la segunda, en el punto D. Las tangentes a la primera circunferencia en C y a la segunda en D se cortan en el punto M. Por el punto de intersección de AM y CD pasa una recta paralela a CM,

que corta AC en el punto K. Demostrar que KB es tangente a la segunda circunferencia.

II.276. Se dan una circunferencia y la tangente a ésta l. Sea N el punto de tangencia, NM, el diámetro. En la recta NM se toma el punto fijo A. Examinemos una circunferencia arbitraria que pasa por A con el centro en l. Supongamos que C y D son los puntos de intersección de esta circunferencia con l, mientras que P y Q, los puntos de intersección de las rectas MC y MD con la circunferencia dada. Demostrar que la cuerda PQ pasa por el punto fijo del plano.

II.277. Los puntos O_1 y O_2 son los centros de dos circunferencias que se intersecan, A es uno de los puntos de su intersección. Las circunferencias tienen dos tangentes comunes; BC y EF son cuerdas de estas circunferencias con extremos en los puntos de tangencia (C y F son los puntos más alejados respecto de A), M y N son los puntos medios de BC y EF. Demostrar que $\angle O_1AO_2 = \angle MAN = 2\angle CAE$.

II.278. En una circunferencia está trazado el diámetro AB y la cuerda CD, perpendicular a AB. Una circunferencia arbitraria toca la cuerda CD y el arco CBD. Demostrar que la tangente a esta circunferencia trazada a partir del punto A es igual a AC.

II.279. Se da un segmento circular. Dos circunferencias arbitrarias son tangentes a la cuerda y el arco de este segmento y se intersecan en los puntos M y N. Demostrar que la recta MN pasa por un punto fijo del plano.

* * *

II.280. Se dan dos círculos iguales que no se intersecan. En dos tangentes interiores comunes se toman dos puntos arbitrarios F y F'. Además, desde ambos puntos se puede trazar sendas tangentes a los círculos dados. Supongamos que las tangentes trazadas a partir de los puntos F y F' hacia uno de los círculos concurren en el punto A y las trazadas hacia el otro, en el punto B. Hay que demostrar que: 1) la recta AB es paralela a la recta que une los centros de los círculos (en caso de círculos desiguales ésta pasa por el punto de intersección de las tangentes exteriores); 2) la recta que une los puntos medios de FF' y AB, pasa por el punto medio del segmento que une los centros de los círculos. (Este problema fue propuesto a los lectores de la revista «Boletín de física experimental y matemáticas elementales» por el profesor V. Yermakov. Este boletín se editaba en Rusia en el siglo pasado. El problema se publicó en el número 14 (2°) de la revista del año 1887. Por la solución del problema se prometió un premio a los lectores: un conjunto de libros de matemáticas.)

II.281. Se dan tres circunferencias α, β y γ. Supongamos que l_1 y l_2 son tangentes interiores comunes a las circunferencias α y β, m_1 y m_2, tangentes interiores comunes a las circunferencias β y γ, n_1 y n_2, tangentes interiores comunes a las circunferencias γ y α. Demostrar que, si las rectas l_1, m_1 y n_1 se cortan en un punto, las rectas l_2, m_2 y n_2 también se cortan en un punto.

II.282. El arco AB de una circunferencia está dividido en tres partes iguales mediante los puntos C y D (C es el punto más próximo a A). Después de girar alrededor de A a un ángulo $\pi/3$, los puntos B, C y D pasarán, respectivamente, a los puntos B_1, C_1 y D_1; F es el punto de intersección de las rectas AB_1 y DC_1; E, un punto tal en la bisectriz del ángulo B_1BA, que $|BD| = |DE|$. Demostrar que el triángulo CEF es regular (*teorema de Finlay*).

*
* *

II.283. Se dan un ángulo con el vértice A y la circunferencia inscrita en éste. Una recta arbitraria, tangente a la circunferencia dada, corta los lados del ángulo en los puntos B y C. Demostrar que la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, contacta con la circunferencia fija inscrita en el ángulo dado.

II.284. En el lado AC del triángulo ABC se toma el punto D. Examinemos una circunferencia que es tangente al segmento AD en el punto M, al segmento BD y la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC. Demostrar que la recta que pasa por M paralelamente a BD, es tangente a la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

II.285. En el lado AC del triángulo ABC se toma el punto D. Supongamos que O_1 es el centro de una circunferencia tangente a los segmentos AD, BD y a la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, mientras que O_2 es el centro de una circunferencia tangente a los segmentos CD, BD y a la circunferencia circunscrita. Demostrar que la

recta O_1O_2 pasa por el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC— el punto O—; además, $|O_1O| : |OO_2| = \operatorname{tg}^2 (\varphi/2)$, donde $\varphi = \angle BDA$ (*teorema de Victor Thebault*).

II.286. Cada una de las cuatro circunferencias toca interiormente la circunferencia dada y dos cuerdas suyas que se intersecan. Demostrar que las diagonales del cuadrilátero con vértices en los centros de estas circunferencias son mutuamente perpendiculares.

* * *

II.287. Demostrar que la circunferencia de los nueve puntos (véase el problema II.160) es tangente a la circunferencia inscrita en un triángulo y a todas las circunferencias exinscritas (*teorema de Feuerbach*).

II.288. Sea H el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC. Demostrar que la circunferencia de los nueve puntos es tangente a todas las circunferencias inscritas y exinscritas de los triángulos AHB, BHC, CHA.

II.289. Demostrar que el punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero con vértices en los puntos, en los que la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC toca las circunferencias inscrita y exinscritas de este triángulo, se halla en su línea media.

II.290. Designemos con F, F_a, F_b y F_c los puntos, en los cuales la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC toca la circunferencia inscrita y tres circunferencias exinscritas (F_a es el punto de tangencia con

la circunferencia, cuyo centro es I_a, etc.). Supongamos también que A_1 y A_2, B_1 y B_2, C_1 y C_2 son los puntos, en los que las bisectrices de los ángulos interiores y exteriores A, B y C, respectivamente, intersecan los lados opuestos. Demostrar la semejanza de los triángulos siguientes: $\triangle F_aF_bF_c$ y $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle FF_bF_c$ y $\triangle A_1B_2C_2$, $\triangle FF_cF_a$ y $\triangle B_1C_2A_2$, $\triangle FF_aF_b$ y $\triangle C_1A_2B_2$ (*teorema de Victor Thebault*).

§ 7. Combinaciones de figuras. Desplazamientos por el plano. Polígonos

II.291. Sobre los lados BC, CA y AB del triángulo ABC hacia el exterior están construidos los cuadrados $BCDE$, $ACFG$, $BAHK$. Sean $FCDQ$ y $ENKP$ dos paralelogramos. Demostrar que el triángulo APQ es rectángulo e isósceles.

II.292. Supongamos que $ABCD$ es un rectángulo, E es un punto tomado en BC, F, en DC; E_1 es el punto medio de AE_1, F_1, el punto medio de AF. Demostrar que, si $\triangle AEF$ es regular, los triángulos DE_1C y BF_1C lo son también.

II.293. Sobre los catetos AC y BC de un triángulo rectángulo hacia el exterior están construidos los cuadrados $ACKL$ y $BCMN$. Demostrar que el cuadrilátero acotado por los catetos y las rectas LB y NA es equivalente al triángulo formado por las rectas LB, NA y la hipotenusa AB.

II.294. Sobre los lados de un cuadrilátero convexo hacia el exterior están construidos

sendos cuadrados. Demostrar que, si las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares, los segmentos que unen los centros de los cuadrados opuestos, pasan por el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero.

II.295. Demostrar que si los centros de los cuadrados, construidos sobre los lados de un triángulo dado hacia el exterior, sirven como vértices del triángulo, cuya área es dos veces mayor que la del dado, los centros de los cuadrados, construidos sobre los lados del triángulo hacia el interior de éste, se hallan en una recta.

II.296. Sobre los lados BC, CA y AB del triángulo ABC hacia el exterior están construidos los triángulos A_1BC, B_1CA y C_1AB de manera que $\angle A_1BC = \angle C_1BA$, $\angle C_1AB = \angle B_1AC$, $\angle B_1CA = \angle A_1CB$. Demostrar que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 se cortan en un punto.

II.297. Supongamos que ABC es un triángulo isósceles ($|AB| = |BC|$); BD es su altura. Un círculo de radio BD rueda por la recta AC. Demostrar que mientras el vértice B se encuentre en el interior del círculo, el arco de la circunferencia dispuesto en el interior del triángulo tiene una longitud constante.

II.298. Por dos rectas que se intersecan, con velocidades iguales se mueven dos puntos. Demostrar que existirá un punto fijo del plano tal que en todos los momentos de tiempo será equidistante de éstos.

II.299. Dos ciclistas avanzan por dos circunferencias que se intersecan. Cada uno sigue su propia circunferencia con una velocidad cons-

tante. Al salir simultáneamente del punto, en el que se intersecan las circunferencias, y al dar sendas vueltas, los ciclistas se encuentran de nuevo en este punto. Demostrar que existe un punto inmóvil tal, en cuyo caso las distancias del mismo hasta los ciclistas siempre son iguales, si estos se mueven: a) en una misma dirección (en sentido de las agujas del reloj); b) en direcciones opuestas.

II.300. Demostrar que: a) el giro alrededor de un punto O en un ángulo α equivale al empleo sucesivo de dos representaciones simétricas axiales, cuyos ejes pasan por el punto O, y el ángulo entre los ejes es $\alpha/2$, mientras que la traslación paralela equivale a dos simetrías axiales con ejes paralelos; b) dos giros sucesivos alrededor del punto O_1 en un ángulo α y alrededor del punto O_2 en un ángulo β ($0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \beta < 2\pi$, los giros se hacen en una misma dirección) equivalen a un giro en el ángulo $\alpha + \beta$ alrededor de cierto punto O, si $\alpha + \beta \neq 2\pi$. Hallar los ángulos del triángulo O_1O_2O.

II.301. Sobre los lados del triángulo arbitrario como sobre bases están construidos tres triángulos isósceles AKB, BLC, CMA con los ángulos en los vértices K, L y M iguales a α, β y γ, $\alpha + \beta + \gamma + 2\pi$. Al mismo tiempo, los tres triángulos están dispuestos fuera del triángulo ABC o bien en su interior. Demostrar que los ángulos del triángulo KLM son iguales a $\alpha/2$, $\beta/2$, $\gamma/2$.

II.302. Supongamos que $ABCDEF$ es un hexágono inscrito, en el cual $|AB| = |CD| = |EF| = R$, donde R es el radio

de la circunferencia y O es su centro. Demostrar que los puntos de las intersecciones dos a dos de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos BOC, DOE, FOA, distintos de O, sirven de vértices para un triángulo regular con el lado R.

II.303. Sobre los lados de un cuadrilátero convexo hacia el exterior están construidos sendos rombos, cuyo ángulo agudo es igual a α. Al mismo tiempo, los ángulos de dos rombos, adyacentes a un mismo vértice del cuadrilátero, son iguales. Demostrar que los segmentos, que unen los centros de los rombos opuestos, son iguales y el ángulo agudo entre estos segmentos es igual a α.

II.304. Viene dado un triángulo arbitrario. Sobre sus lados, fuera del triángulo, están construidos sendos triángulos equiláteros, cuyos centros sirven de vértices para el triángulo Δ. Los centros de los triángulos equiláteros, construidos sobre los lados del triángulo de partida hacia el interior de éste, sirven como vértices para otro triángulo δ. Demostrar que: a) los triángulos Δ y δ son equiláteros; b) los centros de los triángulos Δ y δ coinciden con el centro de masas del triángulo inicial; c) la diferencia de las áreas de los triángulos Δ y δ es igual a la del triángulo de partida.

II.305. En el plano se dan tres puntos. Por éstos están trazadas tres rectas que forman un triángulo regular. Hallar el lugar geométrico de los centros de estos triángulos.

II.306. Se da un triángulo ABC. En la recta que pasa por el vértice A y es perpendicular al lado BC, se toman dos puntos A_1 y A

de modo que $|AA_1| = |AA_2| = |BC|$ (A_1 es más próximo a la recta BC que A_2). De manera análoga, en la recta perpendicular a AC, que pasa por B, se toman los puntos B_1 y B_2 de modo que $|BB_1| = |BB_2| = |AC|$. Demostrar que los segmentos A_1B_2 y A_2B_1 son iguales y mutuamente perpendiculares.

* * *

II.307. Demostrar que un polígono circunscrito, con todos los lados iguales, es regular, si el número de sus lados es impar.

II.308. Por el centro de un polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia unitaria, está trazada una recta. Hallar la suma de los cuadrados de las distancias desde los vértices del polígono de n lados hasta esta recta.

II.309. Demostrar que la suma de las distancias desde un punto arbitrario tomado en el interior de un polígono convexo hasta sus lados es constante, si: a) todos los lados del polígono son iguales; b) todos los ángulos del polígono son iguales.

II.310. Una semicircunferencia está dividida por los puntos $A_0, A_1, \ldots, A_{2n+1}$ en $2n+1$ arcos iguales (A_0 y A_{2n+1} son los extremos de la semicircunferencia), O es el centro de la semicircunferencia. Demostrar que las rectas $A_1A_{2n}, A_2A_{2n-1}, \ldots, A_nA_{n+1}$ forman al intersecarse con las rectas OA_n y OA_{n+1} unos segmentos, la suma de cuyas longitudes es igual al radio de la circunferencia.

II.311. Demostrar que si a partir de un punto arbitrario de una circunferencia se bajan perpendiculares sobre los lados de un polígono inscrito de $2n$ lados, los productos de las longitudes de estas perpendiculares, tomando una sí y otra no, serán iguales.

II.312. Sea $A_1A_2 \ldots A_n$ un polígono inscrito; el centro de la circunferencia se halla en el interior del polígono. Un sistema de circunferencias toca interiormente la dada en los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$; además, uno de los puntos de intersección de dos circunferencias vecinas se encuentra en el lado correspondiente del polígono. Demostrar que si n es impar, todas las circunferencias tienen radios iguales. La longitud de la frontera exterior de la unión de circunferencias inscritas es igual a la longitud de la circunferencia dada.

II.313. Examinemos una circunferencia, en la cual está inscrito un polígono de $(2n+1)$ lados $A_1A_2 \ldots A_{2n+1}$. Sea A un punto arbitrario del arco A_1A_{2n+1}.

a) Demostrar que la suma de las distancias desde A hasta los vértices con números pares es igual a la suma de las distancias desde A hasta los vértices con números impares.

b) Construyamos circunferencias iguales que sean tangentes a la dada de manera igual en los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$. Demostrar que la suma de las tangentes trazadas desde A hacia las circunferencias que tienen contacto con la dada en los vértices con números pares, es igual a la suma de las tangentes trazadas a las circunferencias que tienen contacto

con la dada en los vértices con números impares.

II.314. a) A una circunferencia dada están trazadas dos tangentes. Sean A y B los puntos de tangencia, C, el punto de intersección de las tangentes. Tracemos una recta arbitraria l, tangente a la circunferencia dada, que no pasa por A y B. Sean u y v las distancias desde A y B hasta l; w, la distancia desde C hasta l. Hallar uv/w^2, si $\angle ACB = \alpha$.

b) Alrededor de una circunferencia está circunscrito un polígono. Sea l una recta arbitraria tangente a la circunferencia, que no coincide con ninguno de los lados del polígono. Demostrar que la razón entre el producto de las distancias desde los vértices del polígono hasta l y el producto de las distancias desde los puntos, en los que los lados del polígono contactan con la circunferencia, hasta l no depende de la posición ocupada por la recta l.

c) Sea $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ un polígono de $2n$ lados circunscrito alrededor de una circunferencia, y l, una tangente arbitraria a la circunferencia. Demostrar que el producto de las distancias desde los vértices con números impares hasta l y el producto de distancias desde los vértices con números pares hasta l se encuentran en razón constante que no depende de l (se supone que l no contiene los vértices del polígono).

II.315. En un polígono inscrito están trazadas las diagonales que no se intersecan, sino que lo dividen en triángulos. Demostrar que la suma de radios de las circunferencias

inscritas en estos triángulos no depende de la manera de trazar las diagonales.

II.316. Supongamos que $A_1A_2 \ldots A_n$ es un polígono de perímetro $2p$ circunscrito alrededor de una circunferencia con radio r; $B_1, B_2, \ldots, B_n$, respectivamente, son los puntos de tangencia de los lados A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 con la circunferencia; M es un punto que se encuentra a la distancia d del centro de la circunferencia. Demostrar que

$$|MB_1|^2 \cdot |A_1A_2| + |MB_2|^2 \cdot |A_2A_3| + \ldots + |MB_n|^2 \cdot |A_nA_1| = 2p(r^2 + d^2).$$

II.317. Supongamos que $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito, M, un punto arbitrario de la circunferencia. Demostrar que las proyecciones del punto M sobre las rectas de Simson (véase el problema II.153) que corresponden al punto M respecto a los triángulos ABC, BCD, CDA y DAB se hallan en una recta (*recta de Simson del cuadrilátero*).

Luego, por inducción determinemos la recta de Simson del polígono de $(n + 1)$ lados haciendo uso de la recta de Simson del polígono de n lados, a saber, para el polígono de $(n + 1)$ lados inscrito arbitrario y el punto M en la circunferencia, las proyecciones de este punto sobre todas las rectas de Simson posibles de este punto respecto a todos los polígonos de n lados posibles, formados por n vértices de este polígono de $(n + 1)$ lados, se hallan en una recta que es la recta de Simson del polígono de $(n + 1)$ lados.

II.318. En el interior de la circunferencia α se halla la circunferencia β. En la circunferencia α se dan dos sucesiones de puntos: A_1, A_2, A_3 . . . y B_1, B_2, B_3 . . ., que siguen en una misma dirección, y tales que las rectas A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 . . . y B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 . . . son tangentes a la circunferencia β. Demostrar que las rectas A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 . . . son tangentes a una circunferencia, cuyo centro se encuentra en la recta que pasa por los centros de las circunferencias α y β.

II.319. Aprovechando el resultado del problema anterior, demostrar la afirmación siguiente (*teorema de Poncelet*). Si existe un polígono de n lados inscrito en cierta circunferencia α y circunscrito alrededor de otra circunferencia β, existirá un número infinitamente grande de polígonos de n lados inscritos en la circunferencia α y circunscritos alrededor de la circunferencia β; además, por uno de los vértices de semejante polígono de n lados se puede tomar cualquier punto de la circunferencia α.

II.320. Sobre los lados del triángulo regular PQR como sobre bases, hacia el exterior del mismo, están construidos los triángulos isósceles PXQ, QYR y RZP; además, $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle A)$, $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle B)$, $RZP = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle C)$, donde A, B, C son ángulos de cierto triángulo ABC. Sea A_0 el punto de intersección de las rectas ZP e YQ; B_0, el punto de intersección de las rectas XQ y ZR; C_0, el punto de inter-

sección de las rectas YR y XP. Demostrar que los ángulos del triángulo $A_0B_0C_0$ son iguales a los ángulos correspondientes del triángulo ABC.

Aprovechando el resultado obtenido, demostrar *el teorema de Morley* que reza: si los ángulos de un triángulo arbitrario están divididos en tres partes iguales cada uno (las rectas obtenidas se llaman *trisectrices*), entonces tres puntos que son los puntos de intersección de pares de trisectrices adyacentes a los lados correspondientes del triángulo, son los vértices del triángulo regular.

II.321. Consideremos que los vértices del triángulo ABC siguen uno tras otro en orden positivo, o sea, en sentido contrario a las agujas del reloj. Para cualesquiera dos rayos α y β designemos con el símbolo $\widehat{(\alpha, \beta)}$ el ángulo, en que hace falta girar el rayo α en sentido contrario a las agujas del reloj para que coincida con el rayo β. Designemos con α_1 y α_1' dos rayos que parten desde A, para los cuales $\widehat{(AB, \alpha_1)} = \widehat{(\alpha_1, \alpha_1')} = \widehat{(\alpha_1', AC)} = \frac{1}{3}\angle A$, α_2 y α_2' son rayos, para los cuales $\widehat{(AB, \alpha_2)} = \widehat{(\alpha_2, \alpha_2')} = \widehat{(\alpha_2', AC)} = \frac{1}{3}(\angle A + 2\pi)$ y, por fin, α_3 y α_3' son rayos, para los cuales $\widehat{(AB, \alpha_3)} = \widehat{(\alpha_3, \alpha_3')} = \widehat{(\alpha_3', AC)} = \frac{1}{3}(\angle A + 4\pi)$ $(\alpha_i, \alpha_i'$, donde $i = 1, 2, 3$, respectivamente, los llamaremos *trisectrices de prime-*

ro, segundo y tercer géneros). De la misma manera, para los vértices B y C determinemos β_j, β_j' y γ_k, γ_k' (j, $k = 1, 2, 3$). Designemos con $\alpha_i\beta_j\gamma_k$ el triángulo formado al cortarse las rectas (no los rayos) α_i y β_j', β_j y γ_k', γ_k y α_i'. Demostrar que para todos i, j, k tales, que $i+j+k-1$ no es múltiple de tres, los triángulos $\alpha_i\beta_j\gamma_k$ son regulares, sus lados son correspondientemente paralelos y los vértices se sitúan en las nueve rectas, seis en cada recta (*teorema completo de Morley*).

§ 8. Desigualdades geométricas. Problemas del máximo y del mínimo

II.322. Al principio del siglo XIX, el geómetra italiano Malfatti planteó el problema siguiente: de un triángulo dado hay que cortar tres círculos de tal manera que la suma de sus áreas sea máxima. En las investigaciones posteriores, por *circunferencias de Malfatti* se entendían tres circunferencias que se tocan dos a dos, y cada una de las cuales es tangente también a dos lados del triángulo dado. Demostrar que para el triángulo regular las circunferencias de Malfatti no dan la solución del problema inicial. (Sólo a mediados del siglo XX fue establecido que las circunferencias de Malfatti no dan la solución del problema inicial, cualquiera que sea el triángulo).

II.323. Demostrar que $p \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{6Rr}$, donde p es el semiperímetro, r y R, los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita del triángulo.

II.324. Demostrar que el perímetro del triángulo, cuyos vértices son los pies de las alturas del triángulo acutángulo dado, no supera la mitad del perímetro del triángulo dado.

II.325. Demostrar que si el triángulo, formado por las medianas del triángulo dado, es obtusángulo, el ángulo menor del triángulo de partida es inferior a 45°.

II.326. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Demostrar que por lo menos uno de los cuatro ángulos BAC, DBC, ACD, BDA no supera $\pi/4$.

II.327. Demostrar que la mediana trazada al lado mayor del triángulo forma con los lados que la comprenden, ángulos, la magnitud de cada uno de los cuales no es menor que la mitad del ángulo mínimo del triángulo.

II.328. Demostrar que si en el triángulo ABC el ángulo B es obtuso y $|AB| = |AC|/2$, entonces $\angle C > \angle A/2$.

II.329. Demostrar que la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo no puede pasar por el centro de la circunferencia exinscrita.

II.330. En un triángulo, del vértice A parten la mediana, la bisectriz y la altura. ¿Qué ángulo es mayor: entre la mediana y la bisectriz o entre la bisectriz y la altura, si se da el ángulo A?

II.331. Demostrar que, si las medianas que parten de los vértices B y C del triángulo ABC son perpendiculares, entonces $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \quad 2/3$.

II.332. En el triángulo ABC, $|AB| <$

$< |BC|$. Demostrar que para el punto arbitrario M tomado en la mediana que parte del vértice B, $\angle BAM > \angle BCM$.

II.333. Desde el punto exterior A hacia la circunferencia están trazadas dos tangentes AB y AC y sus puntos medios D y E están unidos mediante la recta DE. Demostrar que esta recta no corta la circunferencia.

II.334. Demostrar que si la recta no corta la circunferencia, entonces para cualesquiera dos puntos de la recta la distancia entre éstos está comprendida entre la suma y la diferencia de longitudes de las tangentes trazadas por estos puntos hacia la circunferencia. Demostrar la afirmación inversa: si para dos puntos cualesquiera de la recta la afirmación no se cumple, entonces la recta corta la circunferencia.

II.335. En el triángulo ABC, los ángulos están ligados mediante la relación $3\angle A - \angle C < \pi$. El ángulo B está dividido en cuatro partes iguales por las rectas que cortan el lado AC. Demostrar que el tercero de los segmentos, en los cuales está partido el lado AC, contando desde el vértice A, es menor de $|AC|/4$.

II.336. Sean a, b, c, d los lados sucesivos de un cuadrilátero. Demostrar que si S es su área, entonces $S \leqslant (ac + bd)/2$; además, la igualdad es válida sólo para el cuadrilátero inscrito, cuyas diagonales son perpendiculares.

II.337. Demostrar que si las longitudes de las bisectrices del triángulo son menores que 1, entonces su área es menor de $\sqrt{3}/3$.

II.338. Demostrar que un triángulo será acutángulo, rectángulo u obtusángulo, según que sea positiva, igual a cero o negativa la expresión $a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2$ (a, b, c, son los lados del triángulo, R, el radio del círculo circunscrito).

II.339. Demostrar que un triángulo será acutángulo, rectángulo u obtusángulo según que su semiperímetro sea mayor, igual o menor, respectivamente, que la suma del diámetro del círculo circunscrito y del radio del inscrito.

II.340. Demostrar que si las longitudes de los lados del triángulo están ligadas mediante la desigualdad $a^2 + b^2 > 5c^2$, c es el menor de los lados.

II.341. En el triángulo ABC, el ángulo B tiene magnitud media: $\angle A < \angle B < \angle C$, I es el centro de la circunferencia inscrita, O, el centro de la circunferencia circunscrita, H, el punto de intersección de las alturas. Demostrar que I se halla en el interior del triángulo BOH.

II.342. Dos triángulos ABC y AMC están dispuestos de tal manera que MC corta AB en el punto O; además, $|AM| + |MC| = |AB| + |BC|$. Demostrar que si $|AB| = |BC|$, entonces $|OB| > |OM|$.

II.343. En el triángulo ABC el punto M se halla en el lado BC. Demostrar que $(|AM| - |AC|)|BC| \leqslant (|AB| - |AC|)|MC|$.

II.344. Sean a, b, c los lados del triángulo ABC; M, un punto arbitrario del plano. Ha-

llar el mínimo de la expresión: $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2$.

II.345. Los lados del ángulo igual a α son las barandas de la mesa de billar. ¿Qué número máximo de rebotes de las barandas puede hacer una bola de billar (se puede prescindir de las dimensiones de la bola)?

II.346. En los vértices de un cuadrado con el lado igual a 2 km están dispuestos sendos pueblos. Estos últimos están unidos mediante caminos de manera que desde cada uno de ellos se puede ir a cualquier otro. ¿Podrá ser inferior a 5,5 km la longitud total de caminos?

II.347. El punto A está dispuesto entre dos rectas paralelas, a unas distancias a y b de ellas. Esto sirve de vértice de un ángulo igual a α de todos los triángulos posibles, cuyos otros vértices se sitúan uno en cada una de las rectas dadas. Hallar el valor mínimo del área de semejantes triángulos.

II.348. Se da una circunferencia de radio R con el centro en el punto O. AB es su diámetro y el punto M se halla en el radio OA: además, $|AM| : |MO| = k$. Por el punto M está trazada una cuerda arbitraria CD. ¿A qué es igual el valor máximo del área del cuadrilátero $ACBD$?

II.349. Viene dado un ángulo con el vértice A y dos puntos M y N en su interior. Por M se traza una recta que corta los lados del ángulo en los puntos B y C. Demostrar que, para que el área del cuadrilátero $ABNC$ sea mínima, es necesario y suficiente que la recta BC corte AN en el punto P tal que

$|BP| = |MC|$. Dar un procedimiento de construcción de esta recta.

II.350. El vértice del ángulo α se halla en el punto O, A es un punto fijo en el interior del ángulo. En los lados del ángulo se toman los puntos M y N de tal manera que $\angle MAN = \beta$ $(\alpha + \beta < \pi)$. Demostrar que si $|AM| = |AN|$, el área del cuadrilátero $OMAN$ alcanzará el máximo (entre todos los cuadriláteros posibles que se obtienen al cambiar la posición de M y N).

II.351. Teniendo en cuenta el resultado del problema anterior, resolver el siguiente. En el interior de un ángulo con el vértice O se toma el punto A. La recta OA forma con los lados del ángulo los ángulos φ y ψ. Hallar en los lados del ángulo los puntos M y N tales que $\angle MAN = \beta$ $(\varphi + \psi + \beta < \pi)$ y el área del cuadrilátero $OMAN$ sea máxima.

II.352. Viene dado el triángulo OBC $(\angle BOC = \alpha)$. Para cada punto A en el lado BC determinemos los puntos M y N en OB y OC de manera que $\angle MAN = \beta$ $(\alpha + \beta < \pi)$ y el área del cuadrilátero $OMAN$ sea máxima. Demostrar que esta área máxima alcanza el mínimo para los puntos A, M y N tales, para los cuales $|MA| = |AN|$ y la recta MN es paralela a BC. (Semejantes puntos se encontrarán si los ángulos B y C del triángulo ABC no superan $\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}$).

II.353. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito. La diagonal AC es igual a a y forma los ángulos α y β con los lados AB y AD, respectivamente. Demostrar que el área del cua-

drilátero está comprendida entre las magnitudes $\frac{a^2 \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \operatorname{sen}\beta}{2 \operatorname{sen}\alpha}$ y $\frac{a^2 \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \operatorname{sen}\alpha}{2 \operatorname{sen}\beta}$.

II.354. Se da el ángulo α con el vértice en el punto O y el punto A en su interior. Examinemos todos los cuadriláteros posibles $OMAN$, cuyos vértices M y N están dispuestos en los lados del ángulo, y tales que $\angle MAN = \beta$ $(\alpha + \beta > \pi)$. Demostrar que si entre estos cuadriláteros hay un cuadrilátero convexo tal que $|MA| = |AN|$, entonces este cuadrilátero tiene el área mínima entre todos los cuadriláteros examinados.

II.355. En el interior de un ángulo con vértice O se da el punto A tal que OA forma los ángulos φ y ψ con los lados del ángulo dado. Hallar en los lados del ángulo los puntos M y N tales que $\angle MAN = \beta$ $(\varphi + \psi + \beta > \pi)$ y el área del cuadrilátero $OMAN$ sea mínima.

II.356. En el triángulo OBC, $\angle BOC = \alpha$; para cada punto A tomado en el lado BC determinemos los puntos M y N, respectivamente, en OB y OC de modo que $\angle MAN = \beta$ y el área del cuadrilátero $OMAN$ sea mínima. Demostrar que esta área mínima será máxima para tales puntos A, M y N, para los cuales $|MA| = |AN|$ y la recta MN es paralela a BC. (Si semejante punto A no existe, el máximo se alcanzará al final del lado BC para el cuadrilátero degenerado.)

II.357. Hallar el radio del círculo de área máxima que pueda cubrirse totalmente con tres círculos de radio R. Resolver el problema

para el caso general, cuando los radios son iguales a R_1, R_2, R_3.

II.358. ¿Es posible o no cubrir totalmente con tres cuadrados unitarios un cuadrado con el lado 5/4?

II.359. ¿A qué es igual el área máxima de un triángulo regular que puede cubrirse totalmente con tres triángulos regulares con el lado igual a 1?

II.360. En el triángulo ABC, en los lados AC y BC se toman los puntos M y N y en el segmento MN, el punto L. Supongamos que las áreas de los triángulos ABC, AML y BNL son iguales, respectivamente, a S, P y Q. Demostrar que $\sqrt[3]{S} \geqslant \sqrt[3]{P} + \sqrt[3]{Q}$.

II.361. Supongamos que a, b, c, S son, respectivamente, los lados y el área de un triángulo; α, β, γ, los ángulos de un otro triángulo. Demostrar que $a^2 \operatorname{ctg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \beta + c^2 \operatorname{ctg} \gamma \geqslant 4S$; además, esta igualdad es válida sólo en el caso, en que ambos triángulos son semejantes.

II.362. Demostrar la desigualdad $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, donde a, b, c, S son, respectivamente, los lados y el área de un triángulo (*desigualdad de Finsler y Hadwiger*).

II.363. Se da un triángulo con los lados a, b y c. Determinar el área del mayor triángulo regular posible circunscrito alrededor del dado y el área del menor triángulo regular inscrito en el primero.

II.364. Sea M un punto arbitrario en el interior del triángulo ABC. La recta AM corta

la circunferencia circunscrita alrededor del ABC en el punto A_1. Demostrar que $\frac{|BM| \cdot |CM|}{|A_1M|} \geqslant 2r$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita; además, la igualdad se obtiene cuando M coincide con el centro de la circunferencia inscrita.

II.365. Sea M un punto arbitrario en el interior del triángulo ABC. Demostrar que $|AM| \text{ sen } \angle BMC + |BM| \text{ sen } \angle AMC + |CM| \text{ sen } \angle AMB \leqslant p$ (p es el semiperímetro del triángulo ABC) y la igualdad se logra cuando M coincide con el centro de la circunferencia inscrita.

II.366. Sean h_1, h_2, h_3 las alturas del triángulo ABC, y u, v, w, las distancias hasta los lados correspondientes desde el punto M que se encuentra en el interior del triángulo ABC. Demostrar las desigualdades:

a) $\frac{h_1}{u} + \frac{h_2}{v} + \frac{h_3}{w} \geqslant 9$;

b) $h_1h_2h_3 \geqslant 27\ uvw$;

c) $(h_1 - u)(h_2 - v)(h_3 - w) \geqslant 8\ uvw$.

II.367. Supongamos que h es la longitud de la altura máxima de un triángulo no obtusángulo, R y r son, respectivamente, los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita. Demostrar que $R + r \leqslant h$ (*Erdös*).

II.368. Demostrar que el radio de la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo formado por las medianas de otro triángulo acutángulo, es superior a 5/6 partes del radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo de partida.

II.369. Demostrar que la suma de cuadra-

dos de las distancias a partir de un punto arbitrario del plano hasta los lados de un triángulo toma el valor mínimo para tal punto señalado en el interior del triángulo, para el cual las distancias hasta los lados correspondientes son proporcionales a estos lados. Demostrar también que este punto es el punto de intersección de las simedianas (véase el problema II.171) del triángulo dado (*punto de Lemuan*).

II.370. En el triángulo dado todos los ángulos son menores de 120°. Demostrar que la suma de las distancias desde un punto arbitrario hasta los vértices de este triángulo toma el valor mínimo para tal punto en su interior, desde el cual cada lado del triángulo se ve bajo el ángulo de 120° (*punto de Torricelli*).

II.371. Demostrar que entre todos los triángulos inscritos en un triángulo acutángulo dado, el perímetro mínimo lo tiene aquel, cuyos vértices son los pies de las alturas del triángulo dado.

II.372. Demostrar que la suma de las distancias desde un punto tomado en el interior del triángulo hasta sus vértices no es menor de $6r$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita.

II.373. Para un triángulo arbitrario demostrar la desigualdad (las designaciones son corrientes) $\frac{bc\cos A}{b+c}+a<p<\frac{bc+a^2}{a}$.

II.374. Supongamos que K es el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero convexo $ABCD$, L, un punto en el lado AD

N, otro punto en el lado BC, M, un punto en la diagonal AC; además, KL y MN son paralelas a AB, LM es paralela a DC. Demostrar que $KLMN$ es un paralelogramo y su área es menor de 8/27 partes de la del cuadrilátero $ABCD$ (*teorema de Hattori*).

II.375. Dos triángulos tienen un lado común. Demostrar que la distancia entre los centros de las circunferencias inscritas en éstos es menor que la distancia entre los vértices que no coinciden (*problema de Zalgaller*).

II.376. En el triángulo ABC, los ángulos son iguales a α, β y γ. Otro triángulo DEF está circunscrito alrededor del triángulo ABC de modo que los vértices A, B y C se encuentran en los lados EF, FD y DE, respectivamente; además, $\angle ECA = \angle DBC = \angle FAB = \varphi$. Determinar el valor del ángulo φ, en cuyo caso el área del triángulo EFD es máxima.

II.377. En los lados BC, CA y AB del triángulo ABC se toman, respectivamente, los puntos A_1, B_1, C_1. Demostrar que el área del triángulo $A_1B_1C_1$ no es menor que el área por lo menos de uno de los tres triángulos: AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C.

II.378. Sean O, I, H, respectivamente, los centros de las circunferencias circunscrita, inscrita y el punto de intersección de las alturas de un triángulo determinado. Demostrar que $|OH| \geqslant |IH| \sqrt{2}$.

II.379. Supongamos que M es un punto arbitrario tomado en el interior del triángulo ABC; x, y y z son las distancias desde M hasta

A, B y C, respectivamente; u, v y w, las distancias desde M hasta los lados BC, CA y AB, respectivamente; a, b, c, los lados correspondientes del triángulo ABC; S es su área; R y r, los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita. Demostrar las desigualdades:

a) $ax + by + cz \geqslant 4S$;

b) $x + y + z \geqslant 2(u + v + w)$ (*desigualdad de Erdös*);

c) $xu + yv + zw \geqslant 2(uv + vw + wu)$;

d) $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leqslant \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$;

e) $xyz \geqslant \frac{R}{2r}(u+v)(v+w)(w+u)$;

f) $xyz \geqslant \frac{4R}{r} uvw$;

g) $xy + yz + zx \geqslant \frac{2R}{r}(uv + vw + wu)$.

II.380. En un triángulo dado tracemos la mediana hacia el lado mayor. Esta mediana divide el triángulo en dos. En cada uno de los triángulos obtenidos también tracemos la mediana hacia el lado mayor, etc. Demostrar que todos los triángulos resultantes pueden dividirse en un número finito de clases de manera que todos los triángulos que pertenecen a una misma clase, serán semejantes entre sí. Demostrar también que cualquier ángulo de cualquier triángulo obtenido a consecuencia de estas construcciones no es menor que la mitad del ángulo mínimo del triángulo inicial.

II.381. Hallar el triángulo del área mínima, el cual puede cubrir totalmente cualquier triángulo con los lados que no superen a 1.

Respuestas, indicaciones y resoluciones

I. Hechos y teoremas geométricos fundamentales. Problemas de cálculo

I.17. Una bisectriz divide el triángulo en dos, cuyas áreas son $\frac{al}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, $\frac{bl}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, respectivamente, y el área de todo el triángulo es $\frac{ab}{2}\operatorname{sen}\alpha$; por consiguiente, $\left(\frac{al}{2}+\frac{bl}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{ab}{2}\operatorname{sen}\alpha$, $l=\frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}$.

I.19. Tomemos una circunferencia tangente a los lados AB, BC y CA. Si esta circunferencia no es tangente al lado DA, entonces, al trazar la tangente DA_1 (A_1 se halla en AB), obtenemos $\triangle DAA_1$, en el cual uno de los lados es igual a la suma de los otros dos.

I.20. Al trazar por los vértices del triángulo las rectas paralelas a los lados opuestos, obtenemos un triángulo, para el cual las alturas del triángulo de partida son perpendiculares levantadas hacia los lados en sus puntos medios.

I.21. $\frac{a+b}{2}$. **I.22.** $\frac{c}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$. **I.23.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}\times$

$\times (a+b-\sqrt{a^2+b^2})$. I.24. $\frac{m^2\sqrt{3}}{2}$.

I.25. $\frac{c+a}{b}$. I.28. $\frac{|a-b|}{2}$. I.29. $\frac{1}{2}(a-b)^2 \operatorname{sen} \alpha$.

I.30. $\frac{h}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi-\alpha}{4}$. I.31 30°. I.32. $\frac{ab}{2}$.

I.33. 90°. I.36. $r^2(2\sqrt{3}+3)$.

I.37. $l\sqrt{a(2l-a)}$. I.38. $\frac{1}{2}(S_1+S_2)$.

I.39. Si $a>b$, la bisectriz corta el lado CD; si $a<b$, la misma corta la base BC.

I.40. $\frac{2ab}{a+b}$. I.41. $\arccos \frac{1-k}{1+k}$. I.42. $\frac{a+b}{4} \times$ $\times \sqrt{3b^2+2ab-a^2}$. I.43. a^2. I.44. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2}}$.

I.45. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^3$. I.46. $90°+\frac{\alpha}{2}$.

I.47. $\frac{|a-b|}{a+b}\sqrt{a^2+b^2}$. I.48. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{b}{a}-1\right)$.

I.49. $(6-\pi):2\pi:(6-\pi)$. I.50. $\frac{a^2}{8}(\sqrt{2}-1)\times$ $\times[(2\sqrt{2}-1)\pi-4]$. I.51. $\frac{a^2}{4}(6\sqrt{3}-6-$ $-\pi)$. I.52. $\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. I.53. $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}$.

I.54. $\frac{d}{3}$. I.55. $\frac{4}{9}S$.

I.58. Si $\alpha<90°$, $\beta<90°$, entonces los ángulos del $\triangle ABC$ son iguales a $90°-\alpha$, $90°-\beta$, $\alpha+\beta$; si $\alpha>90°$, $\beta<90°$, entonces $\alpha-90°$, $90°+\beta$, $180°-\alpha-\beta$; si $\alpha<$ $<90°$, $\beta>90°$, entonces $90°+\alpha$, $\beta-90°$, $180°-\alpha-\beta$.

I.59. $\frac{1}{2}\sqrt{m^2-4S}$. I.60. $\frac{a}{5}$. I.61. $\frac{36}{25}h^2$.

I.62. $\sqrt{\frac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}$.

I.63. En un triángulo isósceles con el ángulo del vértice $\pi/5$ la bisectriz del ángulo adyacente a la base divide el triángulo en dos triángulos isósceles, uno de los cuales es semejante al de partida. *Respuesta*: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

I.64. $R^2\left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}(\pi-\alpha)\right]$. I.65. $\frac{a}{4}\sqrt{10}$.

I.66. $\frac{a(4\operatorname{sen}^2\alpha+1)}{8\operatorname{sen}\alpha}$. I.67. $2r^2(2\sqrt{3}+3)$.

I.68. $\frac{a^2+4r^2}{4r}$. I.69. $\frac{3a}{2(5+\sqrt{13})}$. I.70. $\frac{a\sqrt{10}}{4}$.

I.71. 2. I.72. $\frac{a^3b}{4(a^2+b^2)}$. I.73. $\frac{a}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\alpha\right)$.

I.74. $\frac{a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$. I.75. $\frac{R^2-a^2}{2R}$. I.76. $\frac{a\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$.

I.77. $a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\right)$. I.78. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

I.79. $\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)$. I.80. $\frac{ac+bd}{a}$.

I.81. $\frac{\pi}{2\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}2\beta}$. I.82. $\frac{|b-a|}{4}\sqrt{4d^2-(b-a)^2}$.

I.83. $2(R^2+a^2)$.

I.84. Son posibles dos casos: ambos centros están dispuestos a ambos lados de la cuerda común o a un lado. Respectivamente hay dos pares de respuestas: $a(\sqrt{3}-1)$, $a\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$ y $a(\sqrt{3}+1)$, $a\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$. I.86. $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$.

I.87. $\sqrt{13}$. I.88. $\arccos\frac{1\pm\sqrt{1-2k}}{2}$. I.89. $\frac{2}{3}$.
I.90. $\frac{3a^2}{8}$. I.91. $\frac{\pi}{2}$, $\left|\alpha+\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}\right|$, $\frac{\pi}{2}-$
$-\left|\alpha+\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}\right|$. I.92. $a^2\frac{2\sqrt{3}-3}{8}$. (Como regla, son posibles dos triángulos, pero en uno de éstos dos vértices se hallan en las prolongaciones de las diagonales.)
I.93. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$. I.94. $\frac{br}{c}$. I.95. $\sqrt{7}$.
I.96. $\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$. I.97. $\sqrt{10}$. I.98. $\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}-1$.
I.100. $\frac{1}{3}\sqrt{96-54\sqrt{3}}$. I.101. 3 : 4.
I.102. $a\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$.
I.103. $\frac{1}{10}\sqrt{25a^2+c^2+10ac\cos\beta}$.
I.104. $\frac{3}{4}S$. I.105. $\frac{4\sqrt{Rr}(R-r)}{6Rr-r^2-R^2}$.
I.106. $\frac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{2(b-a\cos\alpha)}$. I.107. $\frac{3}{10}c$.
I.108. $\frac{\sqrt{b^2+a^2+2ab\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. I.109. $S\cos^2\alpha$.
I.110. $\sqrt{4R^2-a^2}$. I.111. $\frac{b}{2}$.
I.112. $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\,|\operatorname{ctg}\alpha|$.
I.113. $\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}ab\cos\alpha}$.
I.114. $\operatorname{arcsen}\frac{2}{\pi}$ y $\pi-\operatorname{arcsen}\frac{2}{\pi}$.
I.115. $a^2(\sqrt{2}-1)$. I.116. $\frac{a\cos(\alpha+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta)}$,

$\frac{a \operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta)}$. I.117. $\frac{1}{2} a (b - a \cos\alpha) \operatorname{sen}^3 \alpha$.

I.118. $\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{3}+3}{6\cos\frac{\alpha}{3}+1}$. I.119. $\dfrac{2\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt{4S_1^2-S_2^2}}$.

I.120. $4\cos\frac{\alpha}{2}\times$

$\times\sqrt{(R_2-R_1)\left(R_2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+R_1\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$.

I.121. $\frac{150}{7}$. I.122. $\sqrt{\dfrac{d^2}{4}+\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$.

I.123. $\sqrt{a^2+b^2-ab}$, $\sqrt{a^2+b^2+ab}$.

I.125. 15°, 75°. I.126. $\frac{R\sqrt{3}}{8}$. I.127. $2\sqrt{6}$.

I.128. $\sqrt{2}$. I.129. $\frac{4}{3}(2\sqrt{3}+3)$.

I.130. $\dfrac{2R^3\operatorname{sen}^3\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$. I.131. $\dfrac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$.

I.132. 1,1. I.133. $\frac{a^2}{16R}$. I.134. $\frac{\pi}{2}$ y

$\arccos\dfrac{R^2-r^2}{R^2+r^2}$. I.135. 30°. I.136. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

I.137. $\frac{R(3-2\sqrt{2})}{3}$. I.138. $4\sqrt{\dfrac{1-\cos\beta}{3-\cos\beta}}$.

I.139. $\dfrac{ab\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\alpha+(a-b)^2}}$. (En el triángulo ONP los segmentos KP y NM son alturas, por eso OA es altura.)

I.140. $\frac{2Rr}{R+r}$. I.141. $\frac{a}{2}$.

I.143. El error no supera 0,00005 de radio de la circunferencia. I.144. $113-56\sqrt{3}$.

I.145. 7,5. I.146. $3\frac{1}{12}$. I.147. $\frac{2\pi}{3}$.

I.148. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$. I.149. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. I.150. $4\sqrt{3}$.

I.151. $\frac{16}{9}(4-\sqrt{7})$. I.152. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

I.153. $2r^2 \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen} 2\alpha$. I.154. $2\frac{2}{3}$.

I.155. $\frac{5}{12}\pi + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{3}{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

I.156. $\sqrt[4]{12}\,(2-\sqrt{3})$. I.157. $ar/(a+2r)$.

I.158. Si $\alpha < \frac{\pi}{3}$, el problema tiene dos soluciones: $R^2 \operatorname{sen}\alpha\left(1 \pm \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)$; si $\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha < \pi$, tiene una sola solución: $R^2 \operatorname{sen}\alpha \times \left(1+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)$. I.159. Desde $\frac{c}{6}(3\sqrt{2}-4)$ hasta $\frac{c}{3}$. I.160. Desde $\frac{|a^2-b^2|}{a^2+b^2}$ hasta 1.

I.161. $\frac{2abc}{ab+bc+ca}$. (Por un punto arbitrario tomado en el interior del triángulo tracemos rectas paralelas a los lados del triángulo. Sea que una de éstas separa de aquél un triángulo semejante al dado con la razón de semajanza λ; la segunda, con la razón de semejanza μ y la tercera, con la razón de semejanza γ. Demuéstrese que $\lambda+\mu+\gamma=2$).

I.162. $\frac{Rr}{R+r}$.

I.163. Tomemos en la recta BA un punto A_1 de tal manera que $|A_1B| = |A_1C|$. Los puntos A_1, A, D y C se hallan en una circunferencia ($\angle DA_1C = 90°-\angle ABC = \angle DAC$).

Por consiguiente, $\angle A_1AC = \angle A_1DC = 90°$ y, por lo tanto, también $\angle BAC = 90°$.

I.164. 1. I.165. $2\frac{1}{4}$. I.166. $\frac{13}{15}a$.

I.167. $\frac{a^2+a\sqrt{a^2+8b^2}}{4}$. I.168. $\frac{a^2+a(d-b)}{a-b}\times$ $\times\sqrt{bd}$. I.169. 6. I.170. 3.

I.171. Si $Q \geqslant \frac{1}{4}S$, entonces la distancia buscada será $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}(\sqrt{S}-\sqrt{Q})$. Pero si $Q <$ $< \frac{1}{4}S$, son posibles dos respuestas: $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}(\sqrt{S}\pm\sqrt{Q})$.

I.172. $3r^2\frac{|1-k^2|}{1+k^2}$. I.173. $\frac{2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$.

I.174. $\frac{(a^2+b^2-c^2)c}{4ab}$.

I.175. Supongamos que A y B son dos vértices vecinos del rombo, M es el punto de intersección de las diagonales, O_1 y O_2 son centros de las circunferencias (O_1, en AM; O_2, en BM). Tenemos: $|AB|^2 = |AM|^2 +$ $+ |BM|^2 = (|O_2A|^2 - |O_2M|^2) +$ $+ (|O_1B|^2 - |O_1M|^2) = R^2 + r^2 -$ $- (|O_1M|^2 + |O_2M|^2) = R^2 + r^2 -$ $- a^2$. *Respuesta*: $\sqrt{R^2+r^2-a^2}$.

I.176. $\frac{8R^3r^3}{(R^2+r^2)^2}$.

I.177. $|AB| = \frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$, si B está dispuesto en el interior del ángulo dado o

del vertical a éste; $|AB| = \frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$ en los demás casos.

I.178. $2 \operatorname{arcsen} \frac{h_a h_b}{l(h_a+h_b)}$. I.179. $\frac{3\sqrt{3}}{5\pi-3}$.

I.180. Puesto que EF es perpendicular a CO (O es el punto de intersección de las diagonales) y del planteamiento se deduce que AC es la bisectriz del ángulo A igual a $60°$. $|AE| = |AF| = |EF|$. Si K es el punto medio de EF, entonces $|AO| = 2a\frac{\sqrt{3}}{3}$, $|CO| = a\frac{\sqrt{3}}{3}$, $|CK|\cdot|OK| = |EK|^2 = \frac{1}{3}|AK|^2$. *Respuesta*: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ y $2a^2\sqrt{3}$.

I.181. $\frac{3}{4}h$. I.182. Designemos $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$, $\angle CBA = \angle BCD = \beta$, $\angle BAM = \varphi$. Entonces $\frac{|BM|+|MC|}{|AM|+|MD|} =$

$$= \frac{\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}(\alpha-\varphi)}{\operatorname{sen}(\beta+\alpha-\varphi)+\operatorname{sen}(\beta+\varphi)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)}{\operatorname{sen}\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\beta+\alpha)+\operatorname{sen}\beta} =$$

$$= \frac{c}{a+b}$$

I.183. Siempre existe una cuerda paralela a la base del triángulo, dividida por los lados en tres partes iguales (sin duda, $0 < a < 2$). Su longitud es $\frac{3a}{2a^2+1}$. Además, si $a < 1/\sqrt{2}$, existe una cuerda más no parale-

la a la base, que posee la misma propiedad. La longitud de esta cuerda es $3/\sqrt{9-2a^2}$.

I.184. Supongamos que BC y AC cortan MN en los puntos P y Q. Designemos: $\frac{|MC|}{|CN|}=x$. Entonces $\frac{|MP|}{|PN|}=\frac{S_{BMC}}{S_{BNC}}=\frac{|MB|\cdot|MC|}{|BN|\cdot|CN|}=\frac{3x}{4}$. Esto significa que $|MP|=\frac{3x}{3x+4}$. De manera análoga, $|MQ|=\frac{x}{x+1}$. Para x obtenemos la ecuación $\frac{x}{x+1}-\frac{3x}{3x+4}=a$, $3ax^2+(7a-1)x+4a=0$. Puesto que $D\geqslant 0$ y $0<a<1$, el valor máximo de a es igual a $7-4\sqrt{3}$.

I.185. De la igualdad $S_{ABN}=S_{CDM}$ se deduce que $S_{MBN}=S_{MCN}$, puesto que MN es la mediana de los triángulos ABN y CDM. Por consiguiente, $BC \parallel MN$, de la misma manera $AD \parallel MN$, es decir, $ABCD$ es un trapecio, en el cual AD y BC son las bases. *Respuesta*: $\frac{5k-2\pm 2\sqrt{2k(2k-1)}}{2-3k}$.

I.186. Tenemos: $|AD|\geqslant|DM|-|AM|=2$. Por otra parte $|AD|\leqslant\frac{|BD|}{\operatorname{sen} 60^\circ}=2$. Por consiguiente, $|AD|=2$, AD es la base mayor y el punto M se halla en la recta AD. *Respuesta*: $\sqrt{7}$.

I.187. Supongamos que BD es la bisectriz en el triángulo ABC, A_1 y C_1 son los puntos medios de BC y AB, $|DA_1|=|DC_1|$. Son posibles dos casos: 1) $\angle BA_1D=\angle BC_1D$ y 2) $\angle BA_1D+\angle BC_1D=180^\circ$. En el primer caso $|AB|=|BC|$. En el segundo caso

hacemos girar el triángulo AC_1D alrededor de D en el ángulo C_1DA_1 de manera que C_1 pase a A_1. Obtenemos el triángulo con los lados $\frac{ba}{a+c}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{bc}{a+c}$ (a, b y c son lados del $\triangle ABC$), semejante al triángulo ABC. Por consiguiente, $\frac{ba}{a+c} : a = \frac{a+c}{2} : b = \frac{bc}{a+c} : c$, de donde $a + c = b\sqrt{2}$. Puesto que $a \neq c$, por lo menos una de las dos desigualdades $b \neq a$, $b \neq c$ es cierta. Sea $b \neq c$, entonces, $b + c = a\sqrt{2}$, $b = a$ y obtenemos el triángulo con los lados a, a, $a(\sqrt{2} - 1)$, que tiene la propiedad dada. Así pues, existen dos clases de triángulos que satisfacen las condiciones del problema: tales son los triángulos regulares y los semejantes al triángulo con los lados $1, 1, \sqrt{2} - 1$.

I.188. Si α es el ángulo comprendido entre los lados a y b, del enunciado se deduce: $a + b \operatorname{sen} \alpha \leqslant b + a \operatorname{sen} \alpha$, $(a - b)(\operatorname{sen} \alpha - 1) \geqslant 1$, $\operatorname{sen} \alpha \geqslant 1$. De aquí $\alpha = 90°$. *Respuesta*: $\sqrt{a^2 + b^2}$.

I.189. Demuéstrese que de todos los cuadriláteros circunscritos alrededor de la circunferencia dada el área menor la tiene el cuadrado. (Se puede aprovechar, por ejemplo, la desigualdad $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta \geqslant 2 \operatorname{tg} [(\alpha + \beta)/2]$, donde α, β son ángulos agudos). Por otra parte, $S_{ABCD} \leqslant \frac{1}{2}(|MA| \cdot |MB| + |MB| \times |MC| + |MC| \cdot |MD| + |MD| \times |MA|) \leqslant \frac{1}{4}(|MA|^2 + |MB|^2) +$

$+\frac{1}{4}(|MB|^2+|MC|^2)+\frac{1}{4}(|MC|^2+$
$+|MD|^2)+\frac{1}{4}(|MD|^2+|MA|^2)=$
$=1$. Por consiguiente, $ABCD$ es un cuadrado de área 1.

I.190. Designemos: $|BM|=x$, $|DM|=$ $=y$, $|AM|=l$, $\angle AMB=\varphi$. Supongamos que M se halla en el segmento BD. Escribamos para los triángulos AMB y AMD el teorema de los cosenos, eliminemos $\cos\varphi$ y obtendremos: $l^2(x+y)+xy(x+y)=$ $=a^2y+d^2x$. De manera análoga se obtiene la relación $l^2(x+y)+xy(x+y)=b^2y+$ $+c^2x$. Así pues, $(a^2-b^2)y=(c^2-d^2)x$. *Respuesta*: $\left|\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}\right|$.

I.191. Si los vértices del rectángulo se hallan en las circunferencias concéntricas (dos opuestos están en las circunferencias de radios R_1 y R_2 y los dos restantes, en las circunferencias de radios R_3 y R_4), deberá cumplirse la igualdad: $R_1^2+R_2^2=R_3^2+R_4^2$. Demostrémoslo. Sea A el centro de las circunferencias, los vértices K y M del rectángulo $KLMN$ se hallan en las circunferencias de radios R_1 y R_2, y los L y N, en las circunferencias de radios R_3 y R_4. En los triángulos AKM y ALN las medianas que parten del vértice A, son iguales; lo son también los lados KM y LN. De esto se deduce la validez de nuestra afirmación.

Sea el segundo lado del rectángulo igual a x, $x>1$. Los radios R_1, R_2, R_3, R_4 en cierto orden son iguales a los números 1, x,

$|\sqrt{x^2+1}, \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$. Verificando las diferentes posibilidades de este orden, encontramos: $x^2 = 7$, $R_1 = 1$, $R_2 = 2\sqrt{2}$, $R_3 = \sqrt{2}$, $R_4 = \sqrt{7}$.

Examinemos el cuadrado $K_1L_1M_1N_1$ con el lado y, cuyos vértices se hallan, respectivamente, en las circunferencias de radios $R_1 = 1, R_3 = \sqrt{2}$, $R_2 = 2\sqrt{2}$, $R_4 = \sqrt{7}$. Designemos: $\angle AK_1L_1 = \varphi$, entonces $\angle AK_1N_1 = 90^\circ \pm \varphi$ o bien $\varphi \pm 90^\circ$. Escribiendo el teorema de los cosenos para los triángulos AK_1L_1 y AK_1N_1, obtenemos:

$$\begin{cases} 1+x^2-2x\cos\varphi=2, \\ 1+x^2\pm 2x\,\mathrm{sen}\,\varphi=7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x\cos\varphi=x^2-1, \\ \pm 2x\,\mathrm{sen}\,\varphi=x^2-6. \end{cases}$$

Elevando al cuadrado dos últimas igualdades y sumándolas, obtenemos: $2x^4-10x^2+37=0$, $x^2=5\pm\frac{1}{2}\sqrt{26}$. *Respuesta*: $\sqrt{5\pm 2\sqrt{26}}$.

I.192. Primero, demostremos la afirmación siguiente. Si las perpendiculares trazadas desde los puntos medios de AB y BC, cortan AC en los puntos M y N de manera que $|MN| = \lambda\,|AC|$, entonces $\mathrm{tg}\,A\ \mathrm{tg}\,C = 1-2\lambda$ o bien $\mathrm{tg}\,A\ \mathrm{tg}\,C = 1+2\lambda$. Designemos: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$. Si los segmentos de las perpendiculares tomados desde los puntos medios de los lados hasta los puntos M y N no se intersecan, entonces $|MN| = b - \frac{c}{2\cos A} - \frac{a}{2\cos C} = \lambda b \Rightarrow 2(1-\lambda)\,\mathrm{sen}\,B\cos A\cos C =$

$= \frac{1}{2}$ (sen $2C$ + sen $2A$) $\Rightarrow 2(1-\lambda) \times$ $\times$ sen $(A+C)$ cos A cos C = sen $(A+C) \times$ $\times$ cos $(A-C) \Rightarrow 2(1-\lambda)$ cos A cos C = = cos A cos C + sen A sen $C \Rightarrow$ $\Rightarrow$ tg A cos $C = 1 - 2\lambda$. Pero si estos segmentos se cortan, entonces tg A tg $C = 1 + 2\lambda$. En nuestro caso $\lambda = 1$, es decir, tg A tg $C = -1$ o bien tg A tg $C = 3$. Para los ángulos B y C obtenemos ($\lambda = 1/2$) tg B tg $C = 0$ (esto es imposible) o tg B tg $C = 2$. El sistema

$$\begin{cases} \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = -1, \\ \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 2, \\ A + B + C = \pi \end{cases}$$

no tiene solución. Por lo tanto tg A tg $C = 3$. Después de resolver un sistema correspondiente hallamos tg $A = 3$, tg $B = 2$, tg $C = 1$. *Respuesta*: $\pi/4$.

I.193. Designaciones: R es el radio de la circunferencia circunscrita alrededor de ABC, O, su centro, N, el punto de intersección de las medianas del ΔBCM. La perpendicularidad de ON y CM equivale a la igualdad $|CN|^2 - |MN|^2 = |CO|^2 - |OM|^2$. Sea $|AB| = 1$, $|MB| = x$, $|CM| = y$, entonces $|MN|^2 = \frac{1}{9}(2y^2 + 2x^2 - k^2)$, $|CN|^2 = \frac{1}{9}(2y^2 + 2k^2 - x^2)$, $|CO|^2 = R^2$, $|OM|^2 = R^2 \cos^2 C + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$. Obtenemos para x la ecuación: $2x^2 - 3x +$

$+k^2=0$. *Respuesta*: $\frac{3\pm\sqrt{9-8k^2}}{4}$ (si $1<k<\frac{3\sqrt{2}}{4}$, ambos puntos se hallan en el interior del segmento AB).

I.194. Si O es el punto medio de AC, entonces $|AB|^2=|BO|^2+|AO|^2=$ $=|BK|^2-|KO|^2+|AO|^2=$ $=|BK|^2+(|AO|-|AK|)(|AO|+$ $+|AK|)=|BK|^2+|AK|\cdot|CK|=$ $=b^2+bd$. *Respuesta*: $\sqrt{b^2+bd}$.

I.195. 1) Una quebrada de tres eslabones tiene longitud igual al segmento que une sus extremos. Esto es posible sólo cuando todos sus vértices se hallan en este segmento. $x=\frac{2ab}{a+b\sqrt{3}}$, $y=\frac{2ab}{a\sqrt{3}+b}$.

2) x, y, z son lados del triángulo, cuyas alturas son iguales a a, b y c; además, este triángulo no debe ser obtusángulo. Para encontrar x, y, z apvovechomos el hecho de que el triángulo, cuyos lados son inversamente proporcionales a las alturas del dado, es semejante al triángulo dado. $x=\frac{1}{2as}$, $y=\frac{1}{2bs}$, $z=\frac{1}{2cs}$, donde $s=\sqrt{p\left(p-\frac{1}{a}\right)\left(p-\frac{1}{b}\right)\times\left(p-\frac{1}{c}\right)}$, $2p=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. El problema tiene solución, si $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant$ $\geqslant\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\geqslant\frac{1}{b^2}$.

3) En el sistema de coordenadas rectangulares examinemos los puntos $A\ (a,\ b)$,

$B(x, 0)$, $C(0, y)$. Del sistema dado se deduce que ABC es un triángulo equilátero. Al girar en un ángulo de 60° alrededor de A en el sentido correspondiente, el punto B pasa a C. Se puede hallar la ecuación de la recta, a la cual pasará el eje x durante semejante giro. (En particular, el coeficiente angular es igual a $\pm\sqrt{3}$.) *Respuesta*: $x = -a \pm b\sqrt{3}$, $y = -b \pm a\sqrt{3}$.

4) Si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, entonces x, y, z son las distancias hasta los vértices del triángulo rectángulo ABC, en el cual los catetos BC y CA son iguales a a y b, a partir de tal punto M en su interior, desde el cual todos sus lados se ven bajo el ángulo de 120°. Para determinar la suma $x + y + z$ hagamos girar el $\triangle CMA$ alrededor de C hacia el exterior respecto al $\triangle ABC$ a un ángulo de 60°. Además, M y A pasarán a M_1 y A_1. Entonces, BMM_1A_1 es una recta y, por consiguiente, $x + y + z = |BM| + |CM| + |AM| = |BA_1| = \sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}}$. De manera análoga se examinan los casos, en que una de las variables es negativa (como regla, no puede ser negativa cualquiera de éstas), etc.

Respuesta: $\pm\sqrt{a^2 + b^2 \pm ab\sqrt{3}}$.

I.196. Sea x la distancia desde el centro del cuadrado hasta la recta l; φ, el ángulo agudo formado por una de las diagonales del cuadrado y l. Las distancias desde los vértices del cuadrado hasta l en orden del recorrido son iguales a $x + a\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\varphi$, $x + a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi$,

$\left|x-a\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\varphi\right|$, $\left|x-a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\right|$. Según el enunciado, $\left|x^2-\frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^2\varphi\right|=\left|x^2-\frac{a^2}{2}\cos^2\varphi\right|$, de donde $\operatorname{tg}^2\varphi=1$, lo que es imposible según el enunciado, o bien $x^2=a^2/4$. *Respuesta*: $a/2$.

I.197. Del planteamiento $\angle B = 2\angle C$ se deduce la relación entre los lados del triángulo: $b^2 = c^2 + ac$. Analizando por turno todas las variantes posibles: $b = 2c$, $a = 2c$, $b = 2a$, $a = 2b$, obtenemos que $a=2c$, puesto que en otros casos no se cumplirá la desigualdad del triángulo. *Respuesta*: $\angle C = \pi/6$, $\angle B = \pi/3$, $\angle A = \pi/2$.

I.198. Sea D el punto medio de BC. Tenemos: $b^2 = |BM|^2 = (|BD| + |DN|)\times(|BD| - |DN|) = |BD|^2 - |DN|^2 = |AB|^2 - |AD|^2 - |DN|^2 = (a+b)^2 - |AD|^2 - |DN|^2$. De aquí $|AN|^2 = |AD|^2 + |DN|^2 = (a+b)^2 - b^2 = a^2 + 2ab$. *Respuesta*: $\sqrt{a^2+2ab}$.

I.199. En BC tomemos un punto N de tal manera que el $\triangle ABN$ sea semejante al $\triangle ADL$. Entonces, $\angle NMA = \angle MAK + \angle KAD = \angle MAB + \angle DAL = \angle MAN$. Por consiguiente, $|MN| = |AN| = k|AL|$. *Respuesta*: $\frac{a}{k} + b$.

I.200. $2\sqrt{pq}$.

I.201. a) $\frac{a}{R}\sqrt{(R\pm x)(R\pm y)}$, «$+$» corresponde a la tangencia exterior de las circun-

ferencias, «—» corresponde a la interior; b) $\frac{a}{R}\sqrt{(R+x)(R-y)}$.

I.202. Sea $|AM|:|MC|=k$. La condición de igualdad de los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABM y BCM significa que sus áreas se relacionan como perímetros. De aquí, puesto que la relación de las áreas es igual a k, obtenemos $|BM|=\frac{13k-12}{1-k}$. De esta igualdad, en particular, se deduce que $12/13<k<1$. Escribiendo para los triángulos ABM y BCM los teoremas de los cosenos (respecto a los ángulos BMA y BMC) y eliminando de estas ecuaciones los cosenos de los ángulos, obtenemos para k la ecuación cuadrática con las raíces 2/3 y 22/23. Tomando en consideración las limitaciones para k, obtenemos la respuesta: $k = 22/23$.

I.203. Supongamos que ABC es el triángulo dado, O, K, H son, respectivamente, el centro de la circunferencia circunscrita, el incentro de la circunferencia inscrita y el punto de intersección de las alturas del $\triangle ABC$. Hagamos uso del hecho siguiente: para un triángulo arbitrario la bisectriz de cualquiera de sus ángulos forma ángulos iguales con el radio de la circunferencia circunscrita y la altura que parte del mismo vértice (demuéstrese). Del hecho de que la circunferencia que pasa por O, K y H, contiene, por lo menos, un vértice del $\triangle ABC$ (sea el vértice A), se deduce que $|OK|=|KH|$. El punto K se halla en el interior por lo menos de uno de los trián-

gulos: OBH, OCH. Sea que se halla el $\triangle OBH$. El ángulo B no puede ser obtuso. En los triángulos OBK y HBK tenemos: $|OK| = |HK|$, KB es el lado común, $\angle OBK = \angle HBK$. Por lo tanto, $\triangle OBK = \triangle HBK$; de ser lo contrario, $\angle BOK + \angle BHK = 180°$, lo que no puede ser ($K$ se encuentra en el interior del $\triangle OBH$). Por consiguiente, $|BH| = |BO| = R$. La distancia desde O hasta AC es igual a $\frac{1}{2}|BH| = \frac{R}{2}$ (problema I.20), es decir, $\angle B = 60°$ ($\angle B$ es agudo), $|AC| = R\sqrt{3}$. Si ahora A_1, B_1 y C_1 son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados BC, CA y AB, entonces $|BA_1| = |BC_1| = r\sqrt{3}$, $|CA_1| + |AC_1| = |CB_1| + |B_1A| = |AC| = R\sqrt{3}$. El perímetro del triángulo es igual a $2\sqrt{3}(R + r)$. Ahora es fácil encontrar su área. *Respuesta*: $\sqrt{3}(R + r)r$.

I.204. Sea P la proyección de M en AB, $|AP| = a + x$. Entonces $|PB| = a - x$, $|MP| = y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $|AN| = (a + x)\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2} + y}$,

$$|NB| = 2a - (a + x)\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+y} = \frac{a\sqrt{2}(a - x + y\sqrt{2})}{a\sqrt{2}+y},$$

$$|AL| = \frac{a\sqrt{2}(a + x + y\sqrt{2})}{a\sqrt{2}+y}.$$ De aquí

$$|AL|^2 + |NB|^2 = \frac{4a^2}{(a\sqrt{2}+y)^2} \times$$

$$\times (a^2 + 2\sqrt{2}ay + 2y^2 + x^2) =$$

$$=\frac{4a^2}{(a\sqrt{2}+y)^2}(a^2+2\sqrt{2}ay+2y^2+$$
$$+(a^2-y^2))=4a^2.$$

I.205. Supongamos que el lado x del triángulo y los lados que parten del punto común de las circunferencias, forman con la recta que pasa por los centros, los ángulos α y β; $\alpha\pm\beta=60°$, entonces $\cos\alpha=\frac{x}{2R}$, $\cos\beta=\frac{x}{2r}$ (o viceversa). Encontrando $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{sen}\beta$ de la ecuación $\cos(\alpha\pm\beta)=\frac{1}{2}$, obtenemos que el lado del triángulo regular es igual a $\frac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2+r^2-Rr}}$.

I.206. Tracemos la recta BA y designemos con D el segundo punto de intersección con la circunferencia menor. Examinemos los arcos AB y AD (menores que la semicircunferencia). Puesto que la tangente común a las circunferencias en el punto A forma con AB y AD ángulos iguales, entonces también los ángulos centrales que corresponden a estos arcos, son iguales.

Por consiguiente, $\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{r}{R}$, $|AD|=a\frac{r}{R}$,

$$|BC|=\sqrt{|BD|\cdot|BA|}=a\sqrt{\frac{R+r}{R}}.$$

I.207. Designaciones: O_1, O_2 y O son centros de las circunferencias (las primeras dos son tangentes a AB), x, y y R son, respectivamente, sus radios. Las tangentes comunes a las circunferencias O_1 y O_2, O_1 y O, O_2 y O

son iguales, respectivamente, a $2\sqrt{xy}$, $2\sqrt{Rx}$, $2\sqrt{Ry}$. Según el enunciado $2\sqrt{xy} = a$. Examinemos el triángulo rectángulo O_1MO_2 con el ángulo recto en el vértice M; $O_1M \parallel BC$, $|O_1O_2| = x + y$, $|O_2M| = 2R - (x + y)$, $|O_1M| = |2\sqrt{Rx} - 2\sqrt{Ry}|$ (O_1M es igual a la diferencia entre las tangentes comunes a las circunferencias con los centros O, O_1 y O, O_2). Así pues, $(x + y)^2 = (2R - x - y)^2 - (2\sqrt{Rx} - 2\sqrt{Ry})^2$, de donde $R = 2\sqrt{xy} = a$.

I.208. Notemos que $O_1O_2O_3O_4$ es un paralelogramo con ángulos α y $\pi - \alpha$ ($O_1O_4 \perp AC$ y $O_2O_3 \parallel AC$, por lo tanto $O_1O_4 \parallel O_2O_3$, etc.). Si K es el punto medio de AM, L es el punto medio de MC, entonces $|O_3O_4| = \frac{|KL|}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{|AC|}{2\operatorname{sen}\alpha}$. De manera análoga $|O_2O_3| = \frac{BD}{2\operatorname{sen}\alpha}$; por consiguiente, $S_{O_1O_2O_3O_4} = \frac{|AC|\cdot|BD|\operatorname{sen}\alpha}{4\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{S_{ABCD}}{2\operatorname{sen}^2\alpha}$. *Respuesta*: $2\operatorname{sen}^2\alpha$.

I.209. Las bisectrices del paralelogramo, al intersecarse, forman un rectángulo, cuyas diagonales son paralelas a los lados del paralelogramo e iguales a la diferencia de los lados del paralelogramo. Por consiguiente, si a y b son los lados del paralelogramo y α es el ángulo entre ellos, entonces $S = ab\operatorname{sen}\alpha$, $Q = \frac{1}{2}(a-b)^2\operatorname{sen}\alpha$, $\frac{S}{Q} = \frac{2ab}{(a-b)^2}$. *Respuesta*: $\frac{S+Q+\sqrt{Q^2+2QS}}{S}$.

I.210. Designemos con x el área del trián-

gulo OMN, con y, el del triángulo CMN; entonces $\frac{|ON|}{|OA|}=\frac{x}{S_1}=\frac{S_3}{S_2}$, $x=\frac{S_1S_3}{S_2}$, $\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{S_1+x}{y}=\frac{S_1+S_2}{S_3+x+y}$. El área buscada es igual a $\frac{S_1S_3(S_1+S_2)(S_3+S_2)}{S_2(S_2^2-S_1S_3)}$.

I.211. Supongamos que en el triángulo ABC el ángulo C es recto; M, el punto de intersección de las medianas; O, el incentro de la circunferencia inscrita; r, su radio; $\angle B=\alpha$; entonces $|AB|=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=$

$$=\frac{r\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)},\quad |CM|=\frac{1}{3}|AB|,$$

$|CO|=r\sqrt{2}$, $|OM|=r$, $\angle OCM=\alpha-\frac{\pi}{4}$. Escribiendo el teorema de los cosenos para $\triangle COM$, obtenemos $1=2+\frac{8}{9(2x-\sqrt{2})^2}-$ $-\frac{8x}{3(2x-\sqrt{2})}$, donde $x=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, de donde $x=\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}$. *Respuesta:* $\frac{\pi}{4}\pm$ $\pm\arccos\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}$.

I.212. Sean iguales a a los segmentos de una mediana. Designemos por x el menor de los segmentos, en los cuales el punto de tangencia parte el lado que corresponde a la mediana. Ahora, todos los lados del triángulo pueden expresarse a través de a y x. Los lados que comprenden la mediana, son $a\sqrt{2}+x$, $3a\sqrt{2}+x$ y el tercer lado es $2a\sqrt{2}+2x$.

Empleando la fórmula de longitud de la mediana (problema I.11), obtenemos $9a^2 = \frac{1}{4}[2(a\sqrt{2}+x)^2 + 2(3a\sqrt{2}+x)^2 - (2a\sqrt{2}+2x)^2]$, de donde $x = a\sqrt{2}/4$. *Respuesta*: 10 : 5 : 13.

I.213. Supongamos que $|BC| = a$, $\angle C > \angle B$, D y E son los puntos medios de AB y AC. El cuadrilátero $EMDN$ es inscrito (puesto que $\angle MEN = \angle MDN = 90°$), $|MN| = a$, $|ED| = a/2$, MN es el diámetro de la circunferencia circunscrita alrededor de $MEND$. Por consiguiente, $\angle DME = 30°$, $\angle CAB = 90° - \angle EMD = 60°$, $\angle CBA = \angle EDN = \angle EMN = \angle EMD/2 = 15°$, $\angle ACB = 105°$. *Respuesta*: $\angle A = 60°$, $\angle B = 15°$, $\angle C = 105°$ o bien $\angle A = 60°$, $\angle B = 105°$, $\angle C = 15°$.

I.214. Designemos con K y M, respectivamente, los puntos de intersección de la recta EF con AD y BC. Sea que M se halla en la prolongación de BC más allá del punto B. Si $|AD| = 3a$, $|BC| = a$, de la somejanza de los triángulos correspondientes se deduce que $|DK| = |AD| = 3a$, $|MB| = |BC| = a$ (fig. 1, *a*).

Además, $|ME| = |EF| = |FK|$, si h es la altura del trapecio, la distancia desde E hasta AD es igual a $\frac{2}{3}h$, $S_{EDK} = ah$, $S_{EDF} = \frac{1}{2}S_{EDK} = \frac{ah}{4} = \frac{1}{4}S$.

Pero si la recta EF corta la base BC en el punto M, $|BM| = \frac{1}{3}a$ (fig. 1, *b*). En este

caso $\frac{|EK|}{|MK|}=2:\frac{5}{3}=\frac{6}{5}$ y la distancia desde E hasta AD es igual a $\frac{6}{5}h$, de modo que

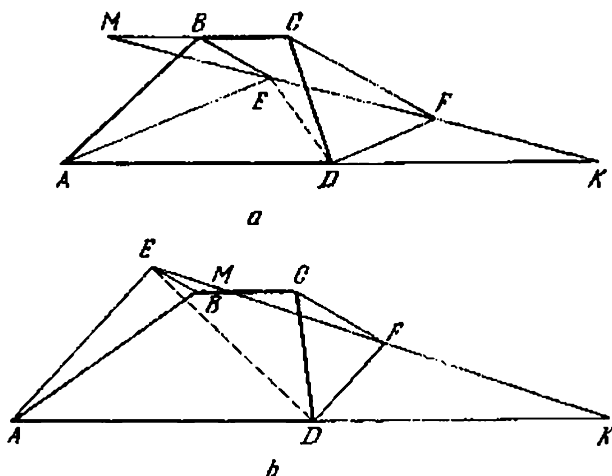


Fig. 1

$S_{EFD}=\frac{1}{2}S_{EDK}=\frac{1}{4}\cdot 3a\cdot\frac{6}{5}h=\frac{9}{20}S$. *Respuesta*: $\frac{1}{4}S$ o bien $\frac{9}{20}S$.

I.215. Sea O el incentro de la circunferencia inscrita; M, el punto medio de BC; K, L, N, los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita a los lados AC, AB y BC del triángulo. Designemos: $|AK|=|AL|=x$, $|CK|=|CN|=y$, $|BL|=|BN|=z$, $y+z=a$. Según el planteamiento, $|OM|=\frac{a}{2}-r$. Por consiguiente, $|NM|=\sqrt{|OM|^2-|ON|^2}=$

$= \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$ y uno de los segmentos, y o z, es igual a $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$, mientras que el otro, a $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$. Igualemos las expresiones para el área del triángulo según las fórmulas de Herón y $S = pr$: $\sqrt{(x+y+z)xyz} = (x+y+z)r \Rightarrow xar = (x+a)r^2 \Rightarrow x = \frac{ar}{a-r}$. De esta manera, el área buscada es igual a $\left(\frac{ar}{a-r} + a\right)r = \frac{a^2r}{a-r}$.

I.216. Demostremos que si C_1 y C_2 (fig. 2) se encuentran a otro lado de BC, que el vér-

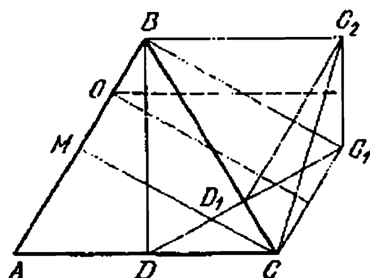


Fig. 2

tice A, entonces el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle CC_1C_2$ se sitúa en el punto O en el lado AB; además, $|BO| = \frac{1}{4}|AB|$. Al trazar la altura CM desde el vértice C, obtenemos que BC_1CM es el rectángulo. Por lo tanto, la perpendicular levantada del punto medio de CC_1 pasa por O. Teniendo en cuenta que $C_1C_2 \parallel BD$ y

$|C_1C_2| = \frac{1}{2}|BD|$, obtenemos que la perpendicular trazada por el punto medio de C_1C_2 también pasa por O. Ahora encontramos fácilmente el radio buscado: éste es igual a

$$\sqrt{|CM|^2+|MO|^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{16}} = \frac{a}{4}\sqrt{13}.$$

I.217. Examínense dos casos: 1) cuando los pies de las perpendiculares se hallan en los lados del paralelogramo y 2) cuando una de las perpendiculares no corta el lado, sobre el cual ésta está bajada. En el 1ʳ caso llegamos a una contradicción y en el 2º obtenemos que $\cos\alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, donde α es el ángulo agudo del paralelogramo dado.

I.218. Al expresar el ángulo PQN a través de los ángulos del triángulo, y teniendo en cuenta que $\angle PMN + \angle PQN = 180°$, hallamos: $\angle PMN = 60°$; de aquí $\angle NPQ = \angle QMN = 30°$, $\angle PNQ = \angle PMQ = 30°$, es decir, $\triangle PQN$ es isósceles con los ángulos adjuntos al lado PN iguales a $30°$, $|PQ| = |QN| = 1/\sqrt{3}$.

I.219. Del planteamiento se deduce que $ABCD$ es un trapecio, $BC \parallel AD$, AC es la bisectriz del ángulo BAD; por lo tanto $|AB| = |BC|$, de manera análoga $|BC| = |CD|$. Sea que $|AB| = |BC| = |CD| = a$, $|AD| = b$. La distancia entre los puntos medios de las diagonales es $2r$, por consiguiente, $\frac{b-a}{2} = 2r$. Tracemos la altura BM desde el punto B sobre AD y obten-

dremos que $|AM| = \frac{b-a}{2} = 2r$. $|BM| = 2r$. Por consiguiente, $a = |AB| = 2r\sqrt{2}$, $b = 4r + 2r\sqrt{2}$. *Respuesta*: $4r^2(\sqrt{2}+1)$.

I.220. Designemos los ángulos A, B y C con α, β y γ, respectivamente. Sea H el punto de intersección de las alturas, O, el centro de la circunferencia que pasa por A, H y C. Entonces, $\angle HOC = 2\angle HAC = 2(90° - \gamma)$, $\angle HOA = 2\angle HCA = 2(90° - \alpha)$. Pero $\angle AOC = 180° - \beta$, (puesto que $BAOC$ es inscrito), $2(90° - \gamma) + 2(90° - \alpha) = 180° - \beta$, $360° - 2\alpha - 2\gamma = 180° - \beta$, $2\beta = 180° - \beta$, $\beta = 60°$, $|AC| = 2R \operatorname{sen} \beta = \sqrt{3}$.

I.221. Al designar la relación $\frac{|AM|}{|MC|} = \lambda$, tendremos: $S_{MCP} = \frac{T}{\lambda}$, $S_{CPN} = \lambda Q$, $S_{MCP} = \lambda S_{CPN}$; por consiguiente, $(T/Q) = \lambda^3$, $S_{ABC} = \frac{|AC|}{|MC|} \cdot \frac{|BC|}{|CN|} S_{CMN} = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}\left(\frac{T}{\lambda} + \lambda Q\right) = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2}(T + \lambda^2 Q) = (\lambda+1)^3 Q = (T^{1/3} + Q^{1/3})^3$.

I.222. Si O es el centro de la circunferencia, el área del $\triangle OMN$ es $\frac{a}{a-R}$ veces superior al área del $\triangle KMN$. Si $\angle MON = \alpha$, entonces $\frac{R^2}{2} \operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{a-R} S$, $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2aS}{R^2(a-R)}$, $|MN| = 2R \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = R\sqrt{1 - \cos \alpha} = R\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a^2S^2}{R^4(a-R)^2}}}$. El problema tiene solución, si $S \leqslant \frac{R^2(a-R)}{2a}$.

I.223. Si $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$, entonces, según el teorema de los senos encontramos: $|AE| = \frac{2m \operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha}$, $|AF| = \frac{|AE|}{\cos\alpha} = \frac{2m \operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha \cos\alpha}$. De esta manera $\frac{9}{4} m = \frac{2m \operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha \cos\alpha}$, de donde $\cos 2\alpha = \frac{7}{18}$, $S_{ABC} = m^2 \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{5m^2 \sqrt{11}}{7}$.

I.224. Los puntos C, M, D y L se hallan en una circunferencia, por consiguiente, $\angle CML = \angle CDL = 30°$. De la misma manera $\angle CMK = 30°$; así, pues $\angle LMK = 60°$ y $\triangle LMK$ es regular, $|KL| = 2/\sqrt{5}$. Según el teorema de los cosenos encontramos que $\cos \angle LCK = -3/5$. Puesto que $\angle DCB = \angle LCK - 120°$, entonces $|DB| = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

I.225. Sea A el punto de intersección de las rectas BC y KM. El cuadrilátero $ONBC$ es inscrito ($\angle OCB = \angle ONB = 90°$), por consiguiente $\angle OBC = \angle ONC = \alpha/2$. También es inscrito el cuadrilátero $CMAO$ y $\angle CAO = \angle CMO = \alpha/2$, es decir, el $\triangle OAB$ es isósceles. Así, pues $|CB| = |AC| = |CO| \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\frac{\alpha}{2}} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

I.226. Los puntos E, M, B y Q (fig. 3) se hallan en una circunferencia con diámetro BE y los puntos E, P, D y N, en la circunferencia con diámetro ED. Por ende, $\angle EMQ = \angle EBQ = 180° - \angle EDC = \angle EDN = \angle EPN$; en forma análoga, $\angle EQM = \angle ENP$, es decir, el $\triangle EMQ$ es semejante al $\triangle EPN$ con la razón de semejanza $\sqrt{k}$.

(Para que la solución sea completa hace falta examinar también otros casos de disposición de los puntos.) *Respuesta*: $d\sqrt{k}$.

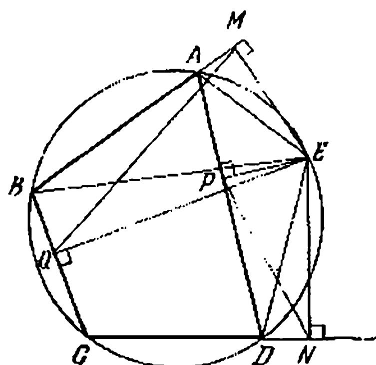


Fig. 3

I.227. Al prolongar los lados no paralelos del trapecio hasta la intersección, obtenemos tres triángulos semejantes; además, la razón de semejanza entre los triángulos medio y mayor y entre el menor y el medio es la misma. Designemos esta razón con λ, la base mayor, con x, el radio de la circunferencia mayor, con R. Entonces, los segmentos paralelos a la base mayor serán iguales, respectivamente, a λx y $\lambda^2 x$; el lado mayor del trapecio inferior, a $2R\frac{d}{c}$; el segundo radio, a λR. Por lo tanto, $R + \lambda R = \frac{c}{2}$. Según la propiedad del cuadrilátero circunscrito, $x + \lambda x = 2R + 2R\frac{d}{c}$. Y, por fin, bajando de un extremo de la base me-

nor de todo el trapecio la perpendicular sobre la base mayor, obtenemos un triángulo rectángulo con los catetos c, $x - \lambda^2 x$ y la hipotenusa d. De esta manera, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x(1+\lambda) = 2R\,\frac{c+d}{c}, \\ x(1-\lambda^2) = \sqrt{d^2-c^2}, \\ R(1+\lambda) = c/2, \end{cases}$$

de donde $\lambda = \frac{d-\sqrt{d^2-c^2}}{c}$. *Respuesta*: las bases son iguales a

$$\frac{d-\sqrt{d^2-c^2}}{c} \quad \text{y} \quad \frac{d+\sqrt{d^2-c^2}}{c}.$$

I.228. Desde los centros de las circunferencias bajemos las perpendiculares sobre uno de los lados y tracemos por el centro de la circunferencia menor la recta, paralela a este lado. Se obtiene un triángulo rectángulo con la hipotenusa $R + r$, un cateto $R - r$ y el ángulo agudo adyacente a este cateto α que es igual al ángulo agudo adyacente a la base del trapecio.
De esta manera, $\cos\alpha = \frac{R-r}{R+r}$. La base mayor es igual a $2R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 2R\sqrt{\frac{R}{r}}$. La base menor es igual a $2r \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2r\sqrt{\frac{r}{R}}$.

I.229. En el lado AB tomemos el punto K de manera que $|BK| = |BD|$, y en la prolongación de AC, el punto E de tal manera, que $|CE| = |CD|$. Demostremos que el

$\triangle ADK$ es semejante al $\triangle ADE$. Si A, B y C son las magnitudes de los ángulos del $\triangle ABC$, entonces $\angle DKA = 180° - \angle DKB = 180° - (90° - \angle B/2) = 90° + \angle B/2$, $\angle ADE = 180° - \angle CED - \angle A/2 = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 90° + \angle B/2$. Por ende, $\angle AKD = \angle ADE$. Además, según el planteamiento, $\angle DAE = \angle DAK$. *Respuesta*: $\sqrt{ab}$.

I.230. En las designaciones del problema anterior

$$|AD|^2 = (|AC| + |CD|)(|AB| - |BD|) = |AC| \cdot |AB| - |CD| \times |BD| + (|AB| \cdot |CD| - |AC| \times |BD|).$$

Pero el sumando comprendido entre paréntesis es igual a cero, puesto que (véase el problema I.9) $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$.

I.231. Prolongamos BN y CN hasta que se interseque por segunda vez con la segunda circunferencia en los puntos K y L, respectivamente; $|MN| = |NK|$, porque $\angle ANB = 90°$ y MK es la cuerda de la circunferencia con el centro en A. Puesto que los arcos correspondientes son iguales, entonces $\angle LNK = \angle BNC = \angle BND$. De esta manera

$$|LN| = |ND| = b,$$
$$|MN| \cdot |NK| = |MN|^2 = ab,$$
$$|MN| = \sqrt{ab}.$$

I.232. Notemos que $PQ \perp CD$. Sea T el punto de intersección de MN y PQ; L y K son los pies de las perpendiculares bajadas desde C y B sobre la recta MN(L y K se hallan en las circunferencias construidas sobre CN y BM como sobre diámetros). Empleando las propiedades de las cuerdas que se intersecan en las circunferencias, obtenemos $|PT| \times \times |TQ| = |NT| \cdot |LT|$, $|PT| \times \times |TQ| = |MT| \cdot |TK|$. Pero $|LT| = |CD|$, $|TK| = |DB|$ (ya que $CLKB$ es un rectángulo y $PQ \perp CB$). De esta manera, $|NT| \cdot |CD| = |MT| \cdot |DB|$, $\frac{|MT|}{|NT|} = \frac{|CD|}{|DB|}$, es decir, la recta PQ divide CB y MN en una misma razón, luego, PQ pasa por A, y D es la base de la altura. *Respuesta*: $|BD| : |DC| = 1 : \sqrt{3}$.

I.233. Sea $\angle BOC = 2\alpha$; $\angle BOL = 2\beta$. Entonces $|AC| = 2R \cos \alpha$, $|CL| = = 2R \operatorname{sen} (\alpha + \beta)$, $|CM| = |CL| \times \times \cos (90° - \beta) = 2R \operatorname{sen} (\alpha + \beta) \operatorname{sen} \beta$, $|AM| = |AC| - |CM| = 2R (\cos \alpha - - \operatorname{sen} (\alpha + \beta) \operatorname{sen} \beta) = 2R \cos \beta \cos (\alpha + + \beta)$ y, por fin, $|AN| = a = |AM| \cos \alpha = = 2R \cos \alpha \cos \beta \cos (\alpha + \beta)$. Por otro lado, si K, P y Q son los puntos medios de AO, CO y CL, respectivamente, entonces $|KP| = \frac{1}{2} |AC| = R \cos \alpha$. Luego $|PQ| = R/2$, $\angle KPQ = \angle KPO + + \angle OPQ = \alpha + 180° - \angle COL = 180° - - \alpha - 2\beta$ y, según el teorema de los cosenos, $|KQ|^2 = \frac{R^2}{4} + R^2 \cos^2 \alpha + R^2 \cos \alpha \times$

$\times \cos(\alpha + 2\beta) = \frac{R^2}{4} + 2R^2 \cos\alpha \cos\beta \times$
$\times \cos(\alpha + \beta) = \frac{R^2}{4} + Ra$. *Respuesta:*
$\sqrt{\frac{R^2}{4} + Ra}$.

I.234. De la semejanza de los triángulos MAB y MBC se deduce que

$$\frac{|MA|}{|MC|} = \frac{|MA|}{|MB|} \cdot \frac{|MB|}{|MC|} = \frac{|BA|^2}{|BC|^2} = k^2.$$

I.235. Del problema I.234 se deduce que $\frac{|AM|^2}{|MB|^2} = \frac{|AC|}{|BC|}$, $\frac{|AN|^2}{|NB|^2} = \frac{|AD|}{|BD|}$. Si K es el punto de intersección de MN y AB, entonces $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{S_{AMN}}{S_{BMN}} = \frac{|AM| \cdot |AN| \operatorname{sen} \angle MAN}{|MB| \cdot |NB| \operatorname{sen} \angle MBN} =$
$= \sqrt{\frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AD|}{|BD|}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}}$.

I.236. Sean K, L, M y N los puntos de tangencia de los lados AB, BC, CD y DA a la circunferencia. Designemos con P el punto de intersección de AC y KM. Si $\angle AKM =$
$= \varphi$, entonces $\angle KMC = 180° - \varphi$. Por ende,

$$\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{S_{AKM}}{S_{KMC}} = \frac{\frac{1}{2}|AK| \cdot |KM| \operatorname{sen}\varphi}{\frac{1}{2}|KM| \cdot |MC| \operatorname{sen}(180° - \varphi)} =$$

$= \frac{|AK|}{|MC|} = \frac{a}{b}$. Pero en la misma razón la recta NL también dividirá AC. Por consecuencia, las rectas AC, KM y NL concurren en un punto. Empleando los mismos razonamientos al caso de la diagonal BD, obtenemos que BD también pasa por el punto P. La relación buscada es igual a a/b.

I.237. Sean P y Q los puntos de intersección de BK y AC, de AB y DC, respectivamente. La recta QP corta AD en el punto M, BC, en el punto N. Aprovechando la semejanza de los triángulos correspondientes, escribamos $\frac{|AM|}{|MD|} = \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|MK|}{|AM|} = \frac{|AK|-|AM|}{|AM|}$. Si $|AM| = x\,|AD|$, entonces $\frac{|AM|}{|MD|} = \frac{|AM|}{|AD|-|AM|} = \frac{x}{1-x}$, $\frac{x}{1-x} = \frac{\lambda - x}{x}$, de donde $x = \frac{\lambda}{\lambda+1}$. *Respuesta*: $\frac{\lambda}{\lambda+1}$. Si $\lambda = \frac{1}{n}$, entonces $|AM| = \frac{1}{n+1}\,|AD|$. De esta manera, adoptando primero que K coincide con D ($\lambda = 1$), obtenemos en calidad de M_1 el punto medio de AB; adoptando que K coincide con M_1, encontramos que M_2 separa 1/3 parte de AD, etc.

I.238. Sea $|KM| = |KN| = x$, $|AD| = y$, $|DB| = z$. Entonces $|CD| = \sqrt{yz}$, $y + z = c$. El radio de la circunferencia inscrita en $\triangle AKB$ es igual a $\frac{1}{2}\,|CD| = \frac{1}{2}\sqrt{yz}$. Expresemos el área del triángulo AKB según las fórmulas de Herón y $S = pr$. Obtenemos la ecuación $\sqrt{(x+y+z)\,xyz} = (x+y+z)\frac{1}{2}\sqrt{yz}$. Tomando en consideración que $y + z = c$, hallamos $x = c/3$.

I.239. Tracemos por A_2 una recta paralela a AC. Sea R el punto de intersección de esta recta con AB. Como $\frac{|AR|}{|RC_1|} = \frac{|B_1A_2|}{|A_2C_1|} = \frac{1}{k}$,

$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=k$, encontraremos $\frac{|AR|}{|AB|}=\frac{k}{(k+1)^2}$. De la misma manera, trazando por C_2 una recta paralela a AC hasta la intersección con BC en el punto S, obtenemos que $\frac{|CS|}{|CB|}=$ $=\frac{k}{(k+1)^2}$. Por eso, los puntos R, A_2, C_2 y S se hallan en una recta paralela a AC. Por tanto, los lados de los $\triangle ABC$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son, respectivamente, paralelos. Ahora no es difícil obtener que $|A_2C_2|=|RS|-|RA_2|-$ $-|C_2S|=|AC|\left(1-\frac{3k}{(k+1)^2}\right)$, por eso la razón de semejanza es igual a $\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}$.

I.240. Hagamos uso de la fórmula siguiente para el área del triángulo: $S=2R^2$ sen $A\times$ $\times$ sen B sen C, donde A, B y C son los ángulos del triángulo. Entonces, el área del triángulo $A_1B_1C_1$, donde A_1, B_1 y C_1 son los puntos de intersección de las bisectrices del $\triangle ABC$ con la circunferencia circunscrita, será igual a $S_1=2R^2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\times\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}\operatorname{sen}\frac{C+A}{2}=$ $=2R^2\cos\frac{C}{2}\times\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$ y $\frac{S}{S_1}=8\operatorname{sen}\frac{A}{2}$ $\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$. Por otra parte, $|BC|=2R\operatorname{sen}A$, $r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=2R\operatorname{sen}A$, $r=4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}$ $\operatorname{sen}\frac{B}{2}\times\operatorname{sen}\frac{C}{2}$. De esta manera, $\frac{S}{S_1}=\frac{2r}{R}$.

I.241. Supongamos que O es el centro de semejanza de los triángulos inscrito y circunscrito, M_1 y M_2 son dos vértices homólogos

(M_1 se halla en el lado AB), el segmento OA corta el triángulo inscrito en el punto K. Entonces $S_{OM_1K} = \lambda S_1$, $S_{OM_2A} = \lambda S_2$, $\frac{S_{OM_1A}}{S_{OM_2A}} = \frac{|OM_1|}{|OM_2|} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$, de donde

$S_{OM_1A} = \lambda \sqrt{S_1S_2}$, donde $\lambda = \frac{S_{OM_1K}}{S_1}$.

Después de examinar seis triángulos similares y sumar sus áreas, obtenomos: $S_{ABC} = \sqrt{S_1S_2}$.

I.242. Sea O el centro del círculo circunscrito; H, el punto de intersección de las alturas del $\triangle ABC$. Puesto que la recta OH es perpendicular a la bisectriz del ángulo A, ella corta los lados AB y AC en los puntos K y M tales, que $|AK| = |AM|$. Por tanto, $\angle AOB = 2\angle C$ (supongamos que el ángulo C es agudo); $\angle OAK = 90° - \angle C = \angle HAM$. Por consecuencia, $\triangle OAK = \triangle HAM$ y $|OA| = |HA| = R$ (R es el radio del círculo circunscrito). Si D es el pie de la perpendicular bajada desde O sobre BC, entonces $|OD| = |AH|/2 = R/2$. Por consiguiente, $\cos A = \cos \angle DOC = 1/2$, $\angle A = 60°$.

I.243. Demuéstrese que el triángulo será acutángulo, rectángulo u obtusángulo, si la distancia entre el centro de la circunferencia circunscrita y el punto de intersección de las alturas será menor, igual o mayor, respectivamente, que la mitad del lado mayor. *Respuesta*: 90°, 60° y 30°.

I.244. La condición de que $S_{\triangle BDM} = S_{\triangle BCK}$ significa que $|BD| \cdot |BM| =$

$= |BK| \cdot |BC|$, es decir,

$$(|BA| + |AC|)|BM| = |BK| \cdot |BC| \quad (1)$$

Tracemos por M la recta paralela a AC; sea L el punto de intersección de esta recta con BA. Demostremos que $|LM| = |KL|$; de aquí se deduce que el ángulo buscado $\angle BKM = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\alpha}{2}$. Puesto que $\triangle BLM$ y $\triangle BAC$ son semejantes, $LM = \frac{|BM|}{|BC|} \cdot |AC|$, $|BL| = \frac{|BM|}{|BC|} \cdot |AB|$. Ahora, haciendo uso de (1), encontremos $|BK|$ y calculemos: $|KL| = |BK| - |BL| = \frac{|BA| + |AC|}{|BC|} \cdot |BM| - \frac{|BM|}{|BC|} \cdot |AB| = \frac{|BM|}{|BC|} \times \times |AC|$, de donde $|LM| = |KL|$.

I.245. Sea que $|AD| = a$; $|BC| = b$. Bajemos desde O la perpendicular OK sobre AB. Ahora encontremos: $|BK| = \sqrt{ab}\,\frac{b}{a+b}$, $|BE| = \sqrt{ab}\,\frac{b}{a-b}$, $|MK| = \frac{\sqrt{ab}}{2} - \sqrt{ab}\,\frac{b}{b+a} = \sqrt{ab}\,\frac{a-b}{2(a+b)}$, $|EK| = |BE| + |BK| = \sqrt{ab}\,\frac{2ab}{(a-b)(a+b)}$, $|OK| = \frac{ab}{a+b}$. Es fácil comprobar que $|OK|^2 = |EK| \cdot |MK|$. *Respuesta*: 90°.

I.246. Notemos que los puntos A, M, N y O se hallan en una circunferencia (fig. 4). Por consiguiente, $\angle NMO = \angle OAN = 90° - \angle AON$. Por lo tanto, al girar OA alrededor de O en ángulo φ, la recta NM girará en el

mismo ángulo φ (en otro sentido) y al desplazar A por la recta OA, la recta NM se mueve paralelamente a sí misma. De aquí se deduce que el ángulo buscado es igual a α.

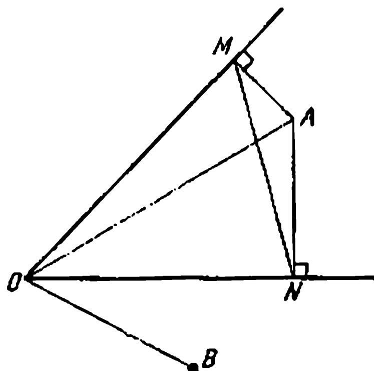


Fig. 4

I.247. Si O_1 es el centro de la circunferencia menor y $\angle BOA = \varphi$, entonces $\angle BAO = 90° - \frac{\varphi}{2}$, $\angle CO_1A = 90° + \varphi$, $\angle CAO_1 = 45° - \frac{\varphi}{2}$. De esta manera, $\angle BAC = \angle BAO - \angle CAO_1 = 45°$.

I.248. Construyamos sobre AB, en el interior del cuadrado, el rectángulo regular ABK. Entonces $\angle KAB = 60°$, $\angle KCD = 15°$, es decir, K coincide con M. *Respuesta*: 30°.

I.249. Sea M_1 simétrico a M respecto a BC. CB es la bisectriz del ángulo MCM_1. Del hecho de que $\angle M_1CA = 60°$ y $|AC| = \frac{1}{2}|CM_1|$ se deduce que $\angle M_1AC = 90°$; entonces AB es la bisectriz del ángulo M_1AC;

además, CB es la bisectriz del ángulo M_1CM, es decir, B es equidistante de las rectas M_1C y M_1A y se halla en la bisectriz del ángulo adyacente al ángulo AM_1C. Conque, $\angle BMC =$ $= \angle BM_1C = 75°$. *Respuesta*: 75°.

I.250. Si $\angle BAC = 2\alpha$, entonces fácilmente encontraremos que $\angle KMC =$ $= \angle MKC = 30° + \alpha$, es decir, $|MC| =$ $= |KC|$. Prolonguemos MK hasta que se interseque con la circunferencia en el punto N; $\triangle KMC$ es semejante a $\triangle KAN$, por consiguiente, $|AN| = |KN| = R$, o sea, al radio de la circunferencia (ya que $\angle AMN =$ $= 30°$). Los puntos A, K y O se hallan en la circunferencia con el centro en N, $\angle ANO =$ $= 60°$, por lo tanto, $\angle AKO = 30°$ ó $150°$, según que el ángulo AMC sea obtuso o agudo. *Respuesta*: 30° ó 150°.

I.251. a) Tracemos la bisectriz del ángulo A y prolonguemos BM hasta que interseque a

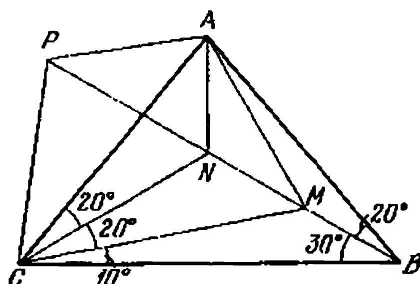


Fig. 5

ésta en el punto N (fig. 5). Puesto que $|BN| = |NC|$, entonces $\angle BNC = 120°$, por consiguiente, también los ángulos BNA,

CNA también tienen 120° cada uno, $\angle NCA = \angle NCM = 20°$, es decir, $\triangle NMC = \triangle NCA$, $|MC| = |AC|$. Consiguientemente, $\triangle AMC$ es isósceles y $\angle AMC = 70°$.

b) Los puntos M, P, A y C se hallan en una circunferencia (M del punto anterior a)). $\angle PAC = \angle PMC = 40°$.

I.252. Describamos alrededor del $\triangle MCB$ una circunferencia (fig. 6) y prolonguemos BN

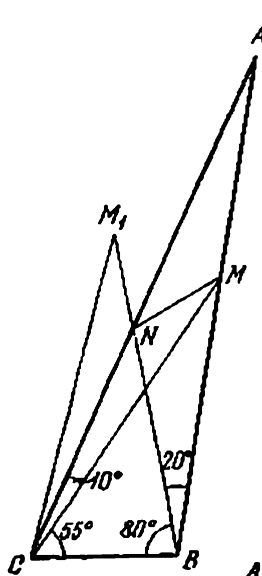


Fig. 6

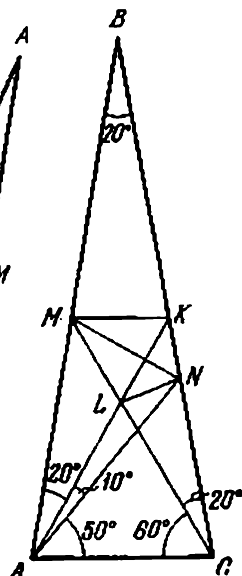


Fig. 7

hasta que se interseque con ésta en el punto M_1; $|CM_1| = |CM|$, puesto que los ángulos que se apoyan sobre éstas en suma dan 180° (80° y 100°); $\angle M_1CM = \angle M_1BM = 20°$, es decir, NC es la bisectriz del ángulo M_1CM

y $\triangle M_1CN = \triangle NCM$, $\angle NMC = \angle NM_1C = \angle CMB = 25°$.

I.253. En BC tomemos el punto K (fig. 7) de tal manera que $\angle KAC = 60°$, $MK \parallel AC$.

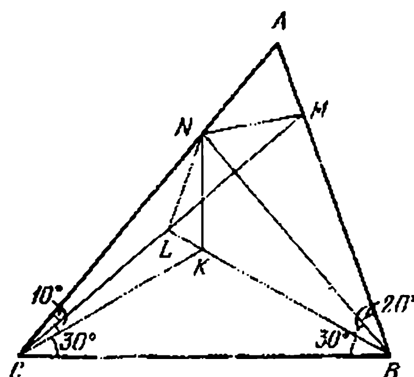


Fig. 8

Sea L el punto de intersección de AK y de MC; $\triangle ALC$ es regular, $\triangle ANC$ es isósceles (calcúlense los ángulos). Luego $\triangle LNC$ lo es también, $\angle LCN = 20°$. Ahora encontremos los ángulos NLM y MKN, cada uno de los cuales tiene 100°; ya que $\triangle MKL$ es regular, los ángulos KLN y NKL tienen 40° cada uno, es decir, $|KN| = |LN|$ y $\triangle MKN = \triangle MLN$, $\angle NML = \angle KMN = 30°$.

I.254. Tomemos el punto K (fig. 8) de manera que $\angle KBC = \angle KCB = 30°$ y designemos con L el punto de intersección de las rectas MC y BK. Puesto que $\triangle BNC$ es isósceles ($\angle NBC = \angle NCB = 50°$), $\angle KNC = 40°$. L es el punto de intersección de las bisectrices de triángulo NKC (LK y LC son las bisectrices). Por consiguiente, NL también

es la bisectriz del ángulo KNC y $\angle LNB = 60°$; BN, en su lugar, es la bisectriz del ángulo MBL; además $BN \perp ML$; por lo tanto,

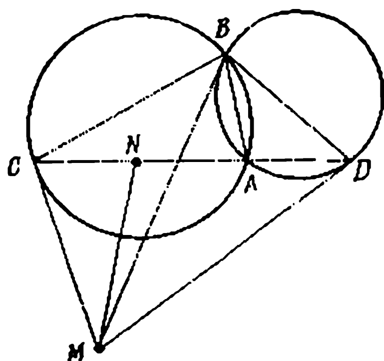


Fig. 9

BN divide ML por la mitad y $\angle MNB = \angle BNL = 60°$ y $\angle NMC = 30°$.

I.255. Sea O el incentro de la circunferencia inscrita; los puntos C, O, K y M se hallan en una circunferencia ($\angle COK = \angle A/2 + \angle C/2 = 90° - \angle B/2 = \angle KMB = 180° - \angle KMC$; pero, si el punto K está situado en la prolongación de NM, entonces $\angle COK = \angle CMK$). De esta manera, $\angle OKC = \angle OMC = 90°$.

I.256. Si P se halla en el arco AB; Q, en el arco AC, designando el ángulo PAB por φ y el ángulo QAC con ψ, obtenemos dos relaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 (C-\varphi) = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} (B+C-\varphi), \\ \operatorname{sen}^2 (B-\psi) = \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} (B+C-\psi). \end{cases}$$

Escribamos la diferencia de estas igualdades; después de las transformaciones obtenemos: $\operatorname{sen}(B + C - \varphi - \psi) \operatorname{sen}[(B - C) + (\varphi - \psi)] = \operatorname{sen}(B + C - \varphi - \psi) \times \operatorname{sen}(\varphi - \psi)$, de donde (puesto que $0 < B + C - \varphi - \psi < \pi$), $B - C + \varphi - \psi = \pi - (\varphi - \psi)$. *Respuesta*: $\frac{\pi - \alpha}{2}$.

I.257. Demostremos que $\triangle CMN$ es semejante a $\triangle CAB$ (fig. 9). Tenemos: $\angle MCN = \angle CBA$. Puesto que el cuadrilátero $CBDM$ es inscrito,

resulta que $\frac{|CM|}{|CB|} = \frac{\operatorname{sen} \angle CBM}{\operatorname{sen} \angle CMB} = \frac{\operatorname{sen} \angle CDM}{\operatorname{sen} \angle CDB} = \frac{\operatorname{sen} \angle DBA}{\operatorname{sen} \angle ADB} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|CN|}{|AB|}$. Por lo tanto, $\angle CMN = \angle BCA$, es decir, el ángulo buscado es igual a $\frac{\alpha}{2}$, o bien a $\pi - \frac{\alpha}{2}$.

I.258. Sea $\angle ABC = 120°$; BD, AE, CM son las bisectrices del $\triangle ABC$. Mostremos que DE es la bisectriz del ángulo BDC y DM, la bisectriz del ángulo BDA. En efecto, BE es la bisectriz del ángulo adyacente al ángulo ABD, es decir, E para $\triangle ABD$ es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo BAD y del ángulo adyacente al ángulo ABD; por consecuencia, E es equidistante de las rectas AB, BD, AD; de tal modo DE es la bisectriz del ángulo BDC. Precisamente de la misma manera DM es la bisectriz del ángulo BDA.

I.259. Designemos: $\angle ABD = \alpha$, $\angle BDC = \varphi$. Según el planteamiento, $\angle DAC = 120° - \alpha$, $\angle BAC = 30° + \alpha$,

$\angle ADB = 30^\circ - \alpha$, $\angle DBC = 60^\circ + \alpha$. Según el teorema de los senos, para los triángulos ABC, BCD, ACD obtenemos $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\operatorname{sen}(30^\circ+\alpha)}{\operatorname{sen}(60^\circ+2\alpha)} = \frac{1}{2\cos(30^\circ+\alpha)}$, $\frac{|DC|}{|BC|} = \frac{\operatorname{sen}(60^\circ+\alpha)}{\operatorname{sen}\varphi}$, $\frac{|AC|}{|DC|} = \frac{\operatorname{sen}(30^\circ-\alpha+\varphi)}{\operatorname{sen}(120^\circ-\alpha)}$. Multiplicando estas igualdades, tendremos: $\operatorname{sen}(30^\circ - \alpha + \varphi) = 2\cos(30^\circ + \alpha) \times$ $\times \operatorname{sen}\varphi \Rightarrow 2\cos(60^\circ + \alpha)\operatorname{sen}(30^\circ - \varphi) =$ $= 0$; de esta manera, $\angle BDC = \varphi = 30^\circ$.

1.260. Igualmente como en el problema 1.17 se obtuvo la fórmula de la bisectriz del ángulo interior en el triángulo ABC, se puede demostrar que la bisectriz del ángulo exterior A se calcula según la fórmula

$$l_A = \frac{2bc\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{|b-c|} \quad (|AB| = c, |BC| = a, |CA| = b).$$

Hallemos $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$: $\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos A)} =$ $= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}}$. Encontrando de la misma manera l_C, expresando $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$ y $\operatorname{sen}\frac{C}{2}$ por medio de los lados del triángulo, igualando l_A y l_C, obtenemos: $\frac{\sqrt{c(a+b-c)}}{|b-c|} = \frac{\sqrt{a(b+c-a)}}{|b-a|}$. Según el planteamiento $b=2$, $c=1$. Luego, a debe satisfacer la ecuación $\sqrt{a+1} = \frac{\sqrt{a(3-a)}}{|a-2|} \Rightarrow$ $\Rightarrow (a-1)(a^2-a-4) = 0$. Pero $a \neq 1$, por consiguiente, $|BC| = a = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

I.261. Si O y O_1 son los centros de las circunferencias circunscritas alrededor del $\triangle ABC$ y del $\triangle ADB$, entonces $\triangle AOO_1$ es semejante al $\triangle ACD$. *Respuesta*: αR.

I.262. Si K es el punto medio del arco AB, O es el centro del círculo, $|AB| = 2R = c$, entonces $|CM|^2 = |CD|^2 + |DM|^2 = |CD|^2 + |DK|^2 = |AD|\,|DB| + R^2 + |DO|^2 = (R + |DO|)(R - |DO|) + R^2 + |DO|^2 = 2R^2 = c^2/2$. *Respuesta*: $c\sqrt{2}/2$.

I.263. Supongamos que KM es un segmento paralelo a BC, N y L son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados AC y BC. Como se sabe (véase el problema I.18), $|AN| = |AL| = p - a$, donde p es el semiperímetro del $\triangle ABC$. Por otra parte $|AN| = |AL|$ es el semiperímetro del $\triangle AKM$ semejante al $\triangle ABC$. Por consiguiente, $\frac{p-a}{p} = \frac{b}{a}$, $p = \frac{a^2}{a-b}$. *Respuesta*: $\frac{2a^2}{a-b}$.

I.264. Si a, b, c son los lados del triángulo dado, los perímetros de los triángulos separados serán $2(p-a)$, $2(p-b)$, $2(p-c)$, donde p es el semiperímetro del triángulo dado. Por consiguiente, si R es el radio de la circunferencia circunscrita, entonces $R_1 + R_2 + R_3 = \left(\frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p}\right) \times R = R$. *Respuesta*: $R_1 + R_2 + R_3$.

I.265. Si $\angle A = \alpha$, entonces $|AM| = \frac{|AC|}{\operatorname{sen}\alpha}$, $|AN| = \frac{|AB|}{\operatorname{sen}\alpha}$, es decir, $|AM| : |AN| = |AC| : |AB|$; de tal modo, el $\triangle AMN$ es

semejante al $\triangle ABC$ con la razón de semejanza $\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$, por eso $|MN| = \frac{|BC|}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R$.

I.266. Sean O_1 y O_2 los centros de las circunferencias que se intersecan. Designemos sus radios por x e y, $|OA| = a$. Puesto que los triángulos AOO_1 y AOO_2, como se deduce del planteamiento, son equivalentes, entonces, expresando sus áreas según la fórmula de Herón y tomando en consideración que $|O_1A| = x$, $|OO_1| = R - x$, $|O_2A| = y$, $|OO_2| = R - y$, después de las transformaciones obtenemos $(R - 2x)^2 = (R - 2y)^2$, de donde, puesto que $x \neq y$, resulta: $x + y = R$. *Respuesta*: R.

I.267. Sean AB y CD las cuerdas dadas y M, su punto de intersección.

a) Los arcos AC y BD en suma constituyen la semicircunferencia: por consiguiente, $|AC|^2 + |BD|^2 = 4R^2$, por lo que $|AM|^2 + |MC|^2 + |MB|^2 + |MD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 = 4R^2$, *Respuesta*: $4R^2$.

b) $|AB|^2 + |CD|^2 = (|AM| + |MB|)^2 + (|CM| + |MD|)^2 = 4R^2 + 2|AM| \cdot |MB| + 2|CM| \times |MD| = 4R^2 + 2(R^2 - a^2) = 6R^2 - 2a^2$. *Respuesta*: $6R^2 - 2a^2$.

I.268. Si M es el segundo punto de intersección de BC con la circunferencia menor, entonces $|BM| = |PC|$ (M se halla entre B y P), $|BP| = |MP| + |BM|$, $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = |PA|^2 + (|PB| - |PC|)^2 + 2|PB| \cdot |PC| = |PA|^2 +$

$+ |MP|^2 + 2|PB||PC| = 4r^2 + 2(R^2 - r^2) = 2(R^2 + r^2)$.

I.269. Designemos las longitudes de los segmentos de cuerdas como se expone en la

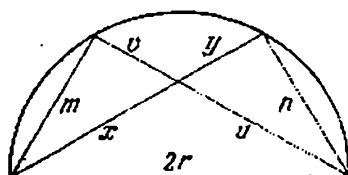


Fig. 10

fig. 10; el diámetro, con $2r$. Aprovechando que los ángulos que se apoyan sobre el diámetro, son rectos y $xy = uv$, obtenemos $x(x + y) + u(u + v) = (u + v)^2 + x^2 - v^2 = (u + v)^2 + m^2 = 4r^2$.

I.270. Si α, β, γ, δ son los arcos que corresponden a los lados a, b, c y d, la igualdad que se demuestra, corresponde a la trigonométrica $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\delta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}$, o bien $\operatorname{sen}\frac{\alpha+\gamma}{2} = \operatorname{sen}\frac{\beta+\delta}{2}$.

I.271. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito. AB y CD se cortan en el punto P; A y D están en los segmentos BP y CP. BC y AD concurren en el punto Q; C y D están en los segmentos BQ y AQ. Circunscribamos alrededor del $\triangle ADP$ una circunferencia. Designemos con M el punto de intersección de esta

circunferencia con la recta PQ. (Demuéstrese que M se halla en el segmento PQ.) Tenemos: $\angle DMQ = \angle DAP = \angle BCD$. Por consiguiente, el cuadrilátero $CDMQ$ es inscrito. Puesto que según el planteamiento las tangentes trazadas desde P y Q a la circunferencia inicial son iguales a a y b, entonces $|QM| \times \times |QP| = |QD| \cdot |QA| = b^2$, $|PM| \times \times |PQ| = |PD| \cdot |PC| = a^2$. Al sumar estas igualdades, obtenemos $|PQ|^2 = a^2 + + b^2$. *Respuesta*: $\sqrt{a^2 + b^2}$.

I.272. El segmento QP es igual (véase el problema I.271) a $\sqrt{(b^2 - R^2) + (c^2 - R^2)} = = \sqrt{b^2 + c^2 - 2R^2}$. Sea $ABCD$ el cuadrilátero dado, Q, el punto de intersección de AB y CD (A se halla en el segmento BQ). Para encontrar la longitud PQ circunscribamos la circunferencia alrededor del $\triangle QCA$; designemos por N el punto de intersección de QP con esta circunferencia. Puesto que $\angle ANP = \angle ACQ = \angle ABP$, los puntos A, B, N y P se sitúan también en una circunferencia. Tenemos: $|QP| \cdot |QN| = |QA| \times \times |QB| = b^2 - R^2$, $|PN| \cdot |PQ| = = |CP| \cdot |PA| = R^2 - a^2$. Restando la segunda igualdad de la primera, obtenemos $|QP|^2 = b^2 + a^2 - 2R^2$. En forma análoga, $|PM|^2 = c^2 + a^2 - 2R^2$. *Respuesta*: $|QM| = = \sqrt{b^2 + c^2 - 2R^2}$, $|QP| = \sqrt{b^2 + a^2 - 2R^2}$, $|PM| = \sqrt{c^2 + a^2 - 2R^2}$.

I.273. El radio de la circunferencia inscrita está comprendido entre las magnitudes de los radios de dos casos límites. Este no puede

ser menor que el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo con los lados $a+b$, $b+c$, $c+a$, el cual es igual a S/p, donde S es el área, p, el semiperímetro del triángulo, por lo que $r > \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{(a+b+c)abc}}{a+b+c} = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$. Por otra parte, r es menor que el radio de la circunferencia mostrada

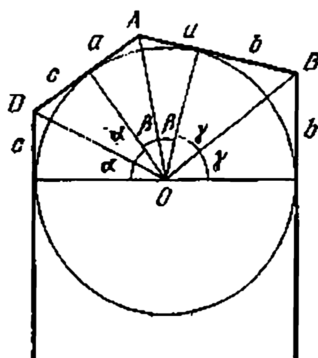


Fig. 11

en la fig. 11 (en esta figura las tangentes opuestas son paralelas, el punto C «corre» al infinito). Puesto que para los ángulos α, β y γ marcados en la figura, se cumple la igualdad $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$, $\operatorname{tg}\alpha = c/\rho$, $\operatorname{tg}\beta = a/\rho$, $\operatorname{tg}\gamma = b/\rho$, donde ρ es el radio de la circunferencia representada, entonces $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{ctg}\gamma$ o bien $\frac{(c+a)\rho}{\rho^2-ac} = \frac{\rho}{b}$, de donde $\rho = \sqrt{ab+bc+ca}$.

De este modo, $\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} < r < \sqrt{ab+bc+ca}$.

I.274. Sea M el punto de intersección de la recta CB con la línea de centros de las circunferencias dadas. Designemos: $|AM| = x$, $\angle ACB = \varphi$; $|AB|^2 = 2rx$, $|AC|^2 = 2Rx$, $\operatorname{sen}\varphi = \frac{x}{|AC|}$. Si ρ es el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$, entonces $\rho = \frac{|AB|}{2\operatorname{sen}\varphi} = \frac{|AB|\cdot|AC|}{2x} = \sqrt{Rr}$. *Respuesta*: $\sqrt{Rr}$.

I.275. Sean O_1, O_2 los centros de las circunferencias; A, el punto de su intersección más alejado respecto de BC, $\angle O_1AO_2 = \varphi$. Mostremos que $\angle BAC = \varphi/2$. (Para otro punto el ángulo será igual a $180 - \frac{\varphi}{2}$.) En efecto, $\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle BCA = 180° - (90° - \angle ABO_1) - (90° - \angle ACO_2) = \angle ABO_1 + \angle ACO_2 = \angle BAO_1 + \angle CAO_2 = \varphi - \angle BAC$. Sea $|O_1O_2| = a$. Trazando $O_2M \parallel BC$ (M se halla en O_1B), obtenemos $|BC| = |O_2M| = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$. Del $\triangle O_1AO_2$ encontramos que $\cos\varphi = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr}$; por ende, el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$ es igual a

$$\frac{|BC|}{2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{a^2-(R-r)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{R^2+r^2-a^2}{2Rr}}} = \sqrt{Rr}.$$

Respuesta: Rr (para ambos triángulos).

I.276. DO y CO son las bisectrices de los ángulos ADC y DCB. Designemos con α, β y γ las magnitudes de los ángulos correspon-

dientes (fig. 12). Pero $\alpha + 2\beta + 2\gamma + \alpha = 2\pi$; por consiguiente $\alpha + \beta + \gamma = \pi$; de aquí se deduce que $\angle DOA = \gamma$, $\angle COB = \beta$ y el $\triangle AOD$ es semejante al $\triangle COB$; por lo

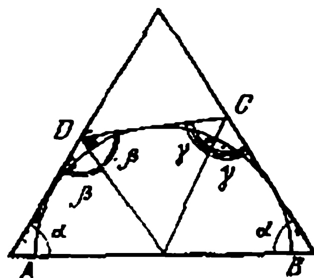


Fig. 12

tanto $|AD| \cdot |CB| = |AO| \cdot |OB| = |AB|^2/4$. *Respuesta*: $a^2/4b$.

I.277. Del planteamiento del problema se deduce que las bisectrices de los ángulos C y D se cortan en el lado AB. Designemos este punto de intersección con O. Circunscribamos alrededor del $\triangle DOC$ una circunferencia. Sea K el segundo punto de intersección de esta circunferencia con AB. Tenemos: $\angle DKA = \angle DCO = \frac{1}{2} \angle DCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAK) = \frac{1}{2}(\angle DKA + \angle ADK)$, por lo que $\angle DKA = \angle ADK$ y $|AD| = |AK|$. De manera análoga, $|BC| = |BK|$; por consiguiente, $|AD| + |CB| = |AB|$. *Respuesta*: $a - b$.

I.278. En el rayo MC tomemos el punto N de tal modo que $|AN| = |AB| = |AD|$.

Puesto que $\frac{\operatorname{sen} \angle MNA}{\operatorname{sen} \angle MCA} = \frac{|AC|}{|AN|} = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{\operatorname{sen} \angle ADC}{\operatorname{sen} \angle ACD}$ y $\angle MCA = \angle ACD$, entonces $\operatorname{sen} \angle MNA = \operatorname{sen} \angle ADC = \operatorname{sen} \angle ABM$, es decir, los ángulos ABM y MNA son iguales o bien en suma dan 180°. Pero M se halla en el interior del $\triangle ABN$, por consiguiente, $\angle ABM = \angle MNA$. Ahora se puede demostrar que $\triangle ABM = \triangle AMN$; $\angle NAC = \angle MNA - \angle NCA = \angle ADC - \angle ACD = \varphi$. *Respuesta*: $\frac{\alpha+\varphi}{2}$.

I.279. Designemos por K y L los puntos de tangencia de la 1ª y la 2ª circunferencias, respectivamente, con uno de los lados del ángulo y por M y N, los segundos puntos de intersección de la recta AB con las circunferencias primera y segunda. Sea O el centro de la 2ª circunferencia. Puesto que A es el centro de semejanza de las circunferencias dadas, entonces $\frac{|AK|}{|AL|} = \frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AN|} = \lambda$, de donde $|AK| \cdot |AL| = \lambda |AL|^2 = \lambda |AB| \cdot |AN| = |AB|^2$. Por otra parte, de la semejanza de los triángulos AKC y ALO tenemos: $|AK| \cdot |AL| = |AC| \times |AO|$. Por consiguiente, $|AC| \times |AO| = |AB|^2$; por lo tanto, los triángulos ABC y AOB son semejantes. *Respuesta*: $\frac{\alpha}{2}$ o bien $\pi - \frac{\alpha}{2}$.

I.280. Sean $\angle BAF = \varphi$, $\angle DBA = \alpha$, $\angle DAB = 2\alpha$ (del planteamiento se deduce que A, E y F se hallan por un lado de BD y $\angle BDA < 90°$, es decir, $\alpha > 30°$). Según el

teorema de los senos, para los triángulos DEA, DAB y BAF tenemos: $\frac{|DE|}{|AD|}=\frac{\operatorname{sen}(120^\circ-2\alpha)}{\operatorname{sen}(30^\circ+\alpha)}=$ $=2\cos(30^\circ+\alpha)$; $\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha}=\frac{1}{4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)}$, $\frac{|AB|}{|BF|}=\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}$. Multiplicando las igualdades, encontramos que $\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}=2\cos(\alpha-30^\circ)$, de donde $\angle BAF=\varphi=30^\circ$.

I.281. Examinemos dos casos.

1) El segmento BK corta AC. De la condición $\angle BKC=\frac{3\angle A-\angle C}{2}$ se deduce que $\angle C=90^\circ$ ($\angle BCK=\angle B+\angle C$, $\angle CBK=$ $=\frac{\angle B}{2}$, $\frac{3\angle A-\angle C}{2}+(\angle B+\angle C)+\frac{\angle B}{2}=$ $=180^\circ$, etc.). Por consiguiente, el punto O se halla en AB y la suma de las distancias desde O hasta AC y AB es igual a $\frac{1}{2}\,|BC|$; de esta manera, $|BC|=4>2+\sqrt{3}=$ $=|AC|+|AB|>|AB|$, es decir, el cateto es mayor que la hipotenusa, lo cual es una contradicción.

2) El segmento BK no corta AC. En este caso $\angle CBK=180^\circ-\frac{\angle B}{2}$, $\angle BCK=\angle A$, $\angle BKC=\frac{3\angle A-\angle C}{2}$ (según la condición); por consecuencia, $\left(180^\circ-\frac{\angle B}{2}\right)+\angle A+$ $+\frac{3\angle A-\angle C}{2}=180^\circ$, de donde $\angle A=30^\circ$.

De nuevo son posibles dos casos.

2a) El punto O, centro de la circunferencia circunscrita, se halla en el interior del $\triangle ABC$. Sea que la perpendicular bajada desde O sobre AB corta AB en N y AC, en K, mientras que la perpendicular bajada sobre AC corta AC en M y AB, en L. Designemos: $|OM| = x$, $|ON| = y$; $x + y = 2$ (según el planteamiento del problema), $|OK| = 2x/\sqrt{3}$, $|MK| = x/\sqrt{3}$, $|AK| = 2|NK| = 2y + 4x/\sqrt{3}$, $|AM| = |AK| - |MK| = 2y + x\sqrt{3}$. En forma análoga encontramos: $|AN| = 2x + y\sqrt{3}$. Según la condición, $|AN| + |AM| = \frac{1}{2}(|AB| + |AC|) = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})$. Por otra parte, $|AN| + |AM| = (2 + \sqrt{3})(x + y) = 2(2 + \sqrt{3})$. Es una contradicción.

2b) El punto O se halla fuera del $\triangle ABC$. Se puede mostrar que el $\angle B$ es obtuso. De lo contrario, si $\angle C > 90°$, $\frac{3\angle A - \angle C}{2} < 0$, por lo que O se encuentra en el interior del segmento AC que no contiene B; no obstante, esta circunstancia no influye en la respuesta. En las designaciones del punto anterior tendremos: $|AM| = 2y - x\sqrt{3}$, $|AN| = y\sqrt{3} - 2x$. Del sistema $y + x = 2$, $|AM| + |AN| = (2 + \sqrt{3})y - (2 + \sqrt{3})x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ encontraremos: $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{5}{4}$, $|AM| =$

$= \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$, el radio de la circunferencia es igual a $\sqrt{|AM|^2 + |MO|^2} = 1/2\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$.

I.282. Si C_1 es un punto simétrico a C respecto a AB, y B_1 es simétrico a B respecto a AC, entonces (como regla, a, b, c son los lados del $\triangle ABC$ y S es su área) $|C_1B_1|^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 3A = a^2 + 2bc(\cos A - \cos 3A) = a^2 + 8bc \operatorname{sen}^2 A \cos A = a^2 + 16 \times (b^2 + c^2 - a^2) \frac{S^2}{b^2c^2}$. Así se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2b^2c^2 + 16S^2(b^2 + c^2 - a^2) = 8b^2c^2, \\ a^2b^2c^2 + 16S^2(a^2 + b^2 - c^2) = 8a^2b^2, \\ a^2b^2c^2 + 16S^2(c^2 + a^2 - b^2) = 14c^2a^2. \end{cases}$$

Restando la 2ª ecuación de la 1ª y tomando en consideración que $a \neq c$, encontraremos que $4S^2 = b^2$. Al sustituir S^2 por $b^2/4$ tenemos:

$$\begin{cases} a^2c^2 + 4(b^2 - c^2 - a^2) = 0, \\ a^2b^2c^2 + 4b^2c^2 + 4b^2a^2 - 4b^4 - 14a^2c^2 = 0, \\ b^2 = 4S^2. \end{cases}$$

Al designar $a^2c^2 = x$, $a^2 + c^2 = y$, tenemos:

$$\begin{cases} 4y - x = 4b^2, \\ x(b^2 - 14) + 4b^2y = 4b^4. \end{cases}$$

Después de multiplicar en el último sistema la 1ª ecuación por b^2 y restándola de la 2ª, encontramos $x(2b^2 - 14) = 0$, de donde $b = \sqrt{7}$. *Respuesta*: 1, $\sqrt{7}$,

$\sqrt{8}$ o bien $\frac{\sqrt{21+4\sqrt{14}}+\sqrt{21-4\sqrt{14}}}{2}$, $\sqrt{7}$, $\frac{\sqrt{21+4\sqrt{14}}+\sqrt{21-4\sqrt{14}}}{2}$.

I.283. Demuéstrese que $\operatorname{tg}\alpha=\frac{|b^2-c^2|}{2S}$, donde S es el área del triángulo (de manera análoga para los demás ángulos). *Respuesta*: $\operatorname{arctg}|\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta|$.

I.284. Hallemos la cotangente del ángulo comprendido entre la mediana y un lado del triángulo ABC. Si $\angle A_1AB=\varphi$ (AA_1 es la mediana del $\triangle ABC$; las designaciones son corrientes: a, b, c son los lados del triángulo, m_a, m_b, m_c son sus medianas; S es su área), entonces $\operatorname{ctg}\varphi=\frac{2c-a\cos\beta}{h_c}=$ $=\frac{2c^2-ac\cos B}{2S}=\frac{3c^2+b^2-a^2}{4S}$. Sea M el punto de intersección de las medianas del $\triangle ABC$; las rectas perpendiculares a las medianas que parten de los vértices A y B, concurren en C_1; $\angle MC_1B=\angle MAB=\varphi$ (el cuadrilátero MAC_1B es inscrito). Por tanto, $S_{MBC_1}=$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2\operatorname{ctg}\varphi=\frac{(2a^2+2c^2-b^2)(3c^2+b^2-a^2)}{72S}$.

El área del triángulo buscado es la suma de las áreas de seis triángulos, cada una de las cuales se encuentra de manera análoga. Como resultado obtenemos $\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{12S}=$ $=\frac{27(R^2-d^2)^2}{4S}$ (demuestren la igualdad a^2+ $+b^2+c^2=9(R^2-d^2)$ por su propia cuenta).

Respuesta: $\frac{27}{4}(R^2-d^2)^2$. I.285. 60°.

I.286. Notemos, al principio, que $|MN|$ es igual a la tangente exterior común a las circunferencias con los centros O_1 y O_2 (problema I.142). Por consiguiente, si los radios de estas circunferencias son x e y, $x+y=$ $=2R-a$, entonces $|MN|=\sqrt{a^2-(x-y)^2}$. Sea φ el ángulo formado por AB con O_1O_2; L, el punto de intersección de AB y O_1O_2. Tenemos $|O_1L|=\frac{xa}{x+y}=\frac{xa}{2R-a}$, sen $\varphi=\frac{x}{|O_1L|}=$ $=\frac{2R-a}{a}$, $|OL|=|x+|O_1L|-R|=\frac{R}{2R-a}\times$ $\times|2x+a-2R|=\frac{R}{2R-a}|x-y|$, $|AB|=$ $=2\sqrt{R^2-|OL|^2\text{sen}^2\varphi}=\frac{2R}{a}\sqrt{a^2-(x-y)^2}=$ $=\frac{2R}{a}|MN|$. *Respuesta*: $\frac{2R}{a}$ (en ambos casos).

I.287. El ángulo AKB es igual a 90° (véase el problema I.255). Sea R el punto de intersección de BK y AC; Q, un punto de BK tal, que $NQ \parallel AC$. Utilizando las designaciones corrientes tendremos: $|AR|=$ $=|AB|=c$, $|MB|=c-(p-a)=$ $=p-b=|NB|$, $\frac{|MK|}{|KN|}=\frac{|MR|}{|QN|}=\frac{|CB|}{|RC|}=$ $=\frac{a}{b-c}$ (consideramos que $b>c$). Puesto que $|MN|=2(p-c)$ sen $\frac{\alpha}{2}$, entonces $|MK|=a$ sen $\frac{\alpha}{2}$. Lo mismo se hace para otros segmentos. El triángulo buscado es se-

mejante a ABC con la razón de semejanza sen $(\alpha/2)$. Su área es igual a $S \times$ sen^2 $(\alpha/2)$.

I.288. Sea $|AM| = x$, $|CN| = y$, $x + y = a$; a, el lado del cuadrado. Designemos con E y F los puntos de intersección de MD y DN con AC. Los segmentos $|AE|$, $|EF|$, $|CF|$ se calculan fácilmente haciendo uso de a, x, y, después de lo cual se puede verificar la igualdad $|EF|^2 = |AE|^2 + |FC|^2 - |AE| \cdot |FC|$.

I.289. Supongamos que P es el punto de intersección de la recta DE con AB, K es el punto de AB tal que $KD \parallel AC$, $\triangle AKD$ es isósceles ($\angle KDA = \angle DAC = \angle DAK$). Por lo tanto KD es la mediana en el triángulo rectángulo y $|MN| = \frac{1}{2}|KD| = \frac{1}{4}|AP| = \frac{1}{4}|AE| = \frac{1}{4}a$.

I.290. Sea A_1 el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas alrededor del $\triangle ABC$ y del $\triangle AB_1C_1$. Del planteamiento se deduce que $|BB_1| = |CC_1|$; además, $\angle ABA_1 = \angle ACA_1$ y $\angle AB_1A_1 = \angle AC_1A_1$. Por consiguiente, $\triangle A_1BB_1 = \triangle A_1CC_1$. Por lo tanto, $|A_1B| = |A_1C|$. Sea que $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle ABA_1 = \angle ACA_1 = \varphi$. Puesto que el $\triangle A_1BC$ es isósceles, $\angle A_1BC = \angle A_1CB$, es decir, $\beta + \varphi = \gamma - \varphi$, $\varphi = \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$ y, si el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$ es igual a R, entonces $|AA_1| = 2R$ sen $\frac{\gamma-\beta}{2}$; pero $|AB| -$

$$- | AC | = 2R \ (\text{sen} \ \gamma - \text{sen} \ \beta) =$$
$$= 4R \ \text{sen} \frac{\gamma-\beta}{2} \cos \frac{\beta+\gamma}{2} = 2 \ | AA_1 | \ \text{sen} \frac{\alpha}{2};$$

por consiguiente, $| AA_1 | = \dfrac{a}{2 \text{ sen } \frac{\alpha}{2}}$.

1.291. Notemos que los puntos A, O, M, B se hallan en una circunferencia ($\angle AMB$ es la semisuma del arco AB y del arco simétrico a AB con respecto a OC, es decir, $\angle AMB = \angle AOB$). Tracemos en AM el segmento MK igual a MB; entonces, $\triangle AKB$ es semejante a $\triangle OMB$. *Respuesta*: $| AB | = 2a$.

1.292. Supongamos que $| AB | = 2r$, $| BC | = 2R$, O_1 es el punto medio de AB, O_2 es el punto medio de BC, O_3 es el punto medio de AC, O es el centro de la cuarta circunferencia, cuyo radio es x. De la condición se deduce que $| O_1O_3 | = R$, $| O_2O_3 | = r$, $| O_1O | = r + x$, $| O_2O | = R + x$, $| O_3O | = R + r - x$. Igualando las expresiones para las áreas de los triángulos O_1OO_3 y O_1OO_2, obtenidas usando la fórmula de Herón y como el semiproducto de la base correspondiente por la altura, obtenemos dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \sqrt{(R+r)\, r\, (R-x)\, x} = \frac{1}{2} Rd, \\ \sqrt{(R+r+x)\, Rrx} = \frac{1}{2} (R+r)\, d. \end{cases}$$

Elevando al cuadrado cada una de éstas y restando una de la otra, encontramos que $x = d/2$. *Respuesta*: $d/2$.

1.293. Sea P el pie de la perpendicular

bajada desde N sobre la recta MB, entonces $|MP| = R\cos\alpha$; por consiguiente, $|MP|$ es igual a la distancia desde el centro O hasta AB; pero la distancia desde el vértice del triángulo hasta el punto de intersección de las alturas es dos veces mayor que la distancia desde el centro del círculo circunscrito hasta el lado opuesto (problema I.20), es decir, $|MP| = \frac{1}{2}|MK|$. De aquí se deduce que, si M se halla en el mayor de los arcos, es decir, $\angle AMB = \alpha$, entonces $|NK| = R$; pero si $\angle AMB = 180° - \alpha$ (es decir, M está situado en el arco menor de la circunferencia), entonces $|NK|^2 = R^2 (1 + 8\cos^2\alpha)$. *Respuesta*: $|NK| = R$, si M se encuentra en el arco mayor de la circunferencia; $|NK| = R\sqrt{1 + 8\cos^2\alpha}$, si M se encuentra en el arco menor de la circunferencia.

I.294. Supongamos que ABC es el triángulo dado, CD es la altura, O_1 y O_2 son los incentros de las circunferencias inscritas en el $\triangle ACD$ y el $\triangle BDC$, K y L son los puntos de intersección de las rectas DO_1 y DO_2 con AC y CB. Puesto que el $\triangle ADC$ es semejante al $\triangle CDB$ y KD y LD son las bisectrices de los ángulos rectos de estos triángulos, entonces O_1 y O_2 dividen KD y LD, respectivamente, en razón igual. Por lo tanto, $KL \parallel O_1O_2$. Pero el cuadrilátero $CKDL$ es inscrito ($\angle KCL = \angle KDL = 90°$). Por consiguiente, $\angle CKL = \angle CDL = \pi/4$, $\angle CLK = \angle CDK = \pi/4$. De este modo, la recta O_1O_2 forma con los catetos ángulos iguales a $\pi/4$. Si M y N son los puntos de intersección

de O_1O_2 con CB y AC, entonces $\triangle CMO_2 = \triangle CDO_2$ (CO_2 es común, $\angle O_2CD = \angle O_2CM$, $\angle CDO_2 = \angle CMO_2$). Por ende, $|CM| = |NC| = h$. *Respuesta*: los ángulos del triángulo son iguales a $\pi/4$, $\pi/4$, $\pi/2$ y el área es igual a $h^2/2$.

I.295. Las designaciones se comprenden, al examinar la fig. 13. $CKDL$ es un rectángulo.

Fig. 13

Puesto que $\angle LKA = 90° + \alpha$, $\angle LBA = 90° - \alpha$, el cuadrilátero $BLKA$ es inscrito,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|LC|}{|CA|} = \frac{h\cos\alpha}{\dfrac{h}{\operatorname{sen}\alpha}} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha. \qquad (1)$$

Si R es el radio de la circunferencia, entonces

$$R = \frac{|KL|}{2\operatorname{sen}\varphi} = \frac{h}{2\operatorname{sen}\varphi}. \qquad (2)$$

Puesto que $\angle LOK = 2\varphi$, $|ON| = R\cos\varphi =$

$= \frac{h}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{h}{\operatorname{sen} 2\alpha}$ (se han empleado las igualdades (1) y (2)). $|OM| = |ON|$ sen $(90° - 2\alpha) = h \frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} = h \operatorname{ctg} 2\alpha$ y, por fin, obtenemos la expresión $\frac{1}{2}|PQ| = |QM| = \sqrt{R^2 - |OM|^2} = \sqrt{\frac{h^2}{4 \operatorname{sen}^2 \varphi} - h^2 \operatorname{ctg}^2 2\alpha} = h \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) - \operatorname{ctg}^2 2\alpha} = h \times \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{\operatorname{sen}^2 2\alpha}\right) - \operatorname{ctg}^2 2\alpha} = \frac{h\sqrt{5}}{2}$, $|PQ| = h\sqrt{5}$. Si ahora los segmentos $|PD|$ y $|DQ|$ de la cuerda se designan con x e y, entonces $x + y = h\sqrt{5}$, $xy = h^2$, de donde encontramos que los segmentos buscados de la cuerda serán iguales a $\frac{\sqrt{5}+1}{2} h$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} h$.

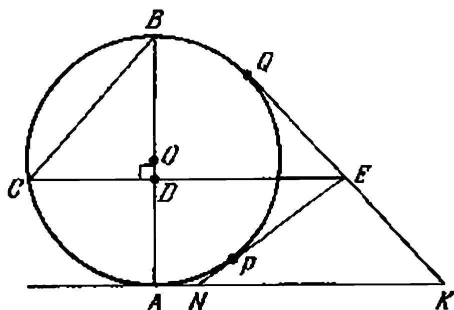


Fig. 14

I.296. Sean P y Q (fig. 14) los puntos de tangencia de las tangentes trazadas desde E. Demostremos que $|EP| = |EQ| = |BD|$. En efecto, $|EP|^2 = (|ED| + |DC|) \times$

$\times (|ED| - |DC|) = |ED|^2 - |DC|^2 = |BC|^2 - |DC|^2 = |BD|^2$ (según el planteamiento, $|ED| = |BC|$). Designemos: $|KN| = x$, $|PN| = |NA| = y$, $|EQ| = |EP| = |BD| = z$. Entonces, $|KE| = x + y - z$. Tenemos: $S_{KEN} = \frac{1}{2} x (2R - z)$; por otra parte, $S_{KEN} = S_{KON} + S_{KOE} - S_{EON} = \frac{1}{2} R (x + x + y - z - y - z) = R (x - z)$. De esta manera, $\frac{1}{2} x (2R - z) = R (x - z)$, $x = 2R$.

Respuesta: $2R$.

I.297. Encontremos, al principio, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{|AO|}{|OC|}$.

Designemos: $\angle C = \beta$. Tenemos $\frac{|AO|}{|OC|} = \frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} =$

$$= \frac{\frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \alpha}{\frac{1}{2} (p-a)(p-b) \operatorname{sen} \beta}. \qquad (1)$$

Pero según el teorema de los cosenos $a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = (p-a)^2 + (p-b)^2 - 2(p-a) \times (p-b) \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{p(p-a-b) + ab \cos \alpha}{(p-a)(p-b)}$, de donde $\operatorname{sen} \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{(1 - \cos \beta)(1 + \cos \beta)} =$

$$= \frac{\sqrt{ab(1-\cos\alpha)(2p^2 - 2ap - 2bp + ab + ab\cos\alpha)}}{(p-a)(p-b)}. \qquad (2)$$

Si $\alpha \to 0$, entonces $\cos \alpha \to 1$; por consiguiente, $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 - \cos \alpha}} = \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \to \sqrt{2}$, cuando $\alpha \to 0$. Teniendo en cuenta la última observa-

ción, por (1) y (2) obtenemos $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{|AO|}{|OC|} =$ $= \sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}}$. Puesto que $|AC| \to$ $\to p$, entonces $\lim\limits_{\alpha \to 0} |AO| = \frac{p\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}+\sqrt{(p-a)(p-b)}}$.

II. Problemas y teoremas selectos de planimetría

II.1. Demuéstrese que, si D es la proyección de M sobre AB, entonces $|AD|^2 - |DB|^2 = |AM|^2 - |MB|^2$.

II.2. Si se encontrase un punto tal (designémoslo por N), la recta MN sería perpendicular a los tres lados del triángulo.

II.3. Si M es el punto de intersección de las perpendiculares bajadas desde A_1 y B_1 sobre BC y AC, entonces (véase el problema II.1) $|MB|^2 - |MC|^2 = |A_1B|^2 - |A_1C|^2$, $|MC|^2 - |MA|^2 = |B_1C|^2 - |B_1A|^2$; sumando estas igualdades y tomando en consideración el planteamiento del problema, obtenemos que $|MB|^2 - |MA|^2 = |C_1B|^2 - |C_1A|^2$, es decir, M se halla en la perpendicular trazada hacia AB por C_1.

II.4. Del resultado del problema II.3 se deduce que la condición de que las perpendiculares bajadas desde A_1, B_1, C_1 sobre los lados BC, CA y AB concurran en un punto, es idéntica a la condición de intersección en un punto de las perpendiculares bajadas desde A, B y C sobre B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1.

II.5. Notemos que las perpendiculares bajadas desde A_1, B_1, C_1 sobre BC, CA, AB, respectivamente, se cortan en el punto D, luego aprovechemos el resultado del problema II.4.

II.6. En el problema II.7 se demuestra un hecho más general. De los razonamientos del problema II.7 se deduce que el centro de la circunferencia se halla en la recta AB.

II.7. Introduzcamos el sistema de coordenadas rectangulares. Si las coordenadas de los puntos A_1, A_2, . . ., A_n son (x_1, y_1) (x_1, y_2), ..., (x_n, y_n) y del punto M, (x, y), entonces nuestro lugar geométrico de puntos se definirá por la ecuación $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$, donde $a = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$; precisamente de aquí se deduce nuestra afirmación.

II.8. Si B es el punto de tangencia, O es el centro de la circunferencia dada, entonces $|OM|^2 - |AM|^2 = |OM|^2 - |BM|^2 = |OB|^2 = R^2$. Por consiguiente, M se halla en la recta perpendicular a OA (véase el problema II.1).

II.9. La condición que determina el conjunto de puntos M, es equivalente a la condición $|AM|^2 - k^2|BM|^2 = 0$, es decir, es una circunferencia (véase el problema II.7). Esta circunferencia se llama *circunferencia de Apolonio*; su centro, como es fácil cerciorarse, se sitúa en la recta AB.

II.10. Puesto que MB es la bisectriz del ángulo AMC, entonces $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$. Por consiguiente, la bisectriz del ángulo exterior res-

pecto al ángulo AMC corta la recta AC en un punto constante K: $\frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$, y el conjunto de puntos M buscado es un arco de la circunferencia construida sobre BK como sobre diámetro, estando aquél comprendido entre las rectas perpendiculares al segmento AC, las cuales pasan por los puntos A y C.

II.11. Supongamos que O_1 y O_2 son los centros de las circunferencias dadas, r_1 y r_2 son sus radios, M es el punto del conjunto buscado, MA_1 y MA_2 son las tangentes. Según lo enunciado, $|MA_1| = k\,|MA_2|$. Por lo tanto, $|MO_1|^2 - k^2\,|MO_2|^2 = r_1^2 - k^2 r_2^2$. Por ende (véase el problema II.6), el conjunto buscado de puntos M, cuando $k \neq 1$, es una circunferencia con el centro situado en la recta O_1O_2, cuando $k = 1$, el conjunto buscado es una recta perpendicular a O_1O_2.

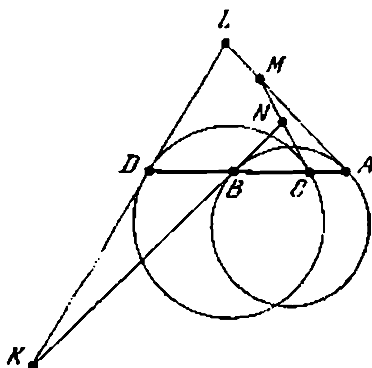


Fig. 15

II.12. Supongamos (fig. 15) que K y L son los puntos de intersección de la tangente

trazada a la segunda circunferencia que pasa por D, con las tangentes a la primera, las cuales pasan por B y A, mientras que M y N son otros dos puntos. Es fácil ver que $\angle DKB = \angle CMA$ (cada uno de estos ángulos es igual a la mitad de la diferencia entre los ángulos que corresponden a los arcos AB y CD). Por eso (en nuestra figura) $\angle LMN + \angle LKN = 180°$. Por consecuencia, el cuadrilátero $KLMN$ es inscrito. Luego tenemos:

$$\frac{|DK|}{|KB|} = \frac{\text{sen } \angle DBK}{\text{sen } \angle BDK} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} \smile AB}{\text{sen } \frac{1}{2} \smile DC}.$$

Análogamente se encuentran las razones entre las longitudes de las tangentes trazadas por los puntos L, M y N. Todas estas razones son iguales entre sí; por lo tanto, el centro de la circunferencia circunscrita alrededor de $KLMN$, se halla en la recta que pasa por los centros de las circunferencias dadas (véase el problema II.6).

II.13. Después de expresar las distancias desde los vértices del triángulo hasta los puntos de tangencia, compruébese el cumplimiento de la condición del problema II.3.

II.14. Sea $|AM_1| : |BM_1| : |CM_1| = p : q : r$. Entonces, el conjunto de los puntos M tales que $(r^2 - q^2)|AM|^2 + (p^2 - r^2)|BM|^2 + (q^2 - p^2)|CM|^2 = 0$, es una línea recta que pasa por M_1, M_2 y el centro del círculo circunscrito alrededor del $\triangle ABC$ (véase el problema II.7).

II.15. Los puntos M_1 y M_2 pertenecen al conjunto de puntos M, para los cuales $5|MA|^2 - 8|MB|^2 + 3|MC|^2 = 0$.

Este conjunto es una línea recta y, evidentemente, el centro del círculo circunscrito satisface la condición que determina este conjunto (véase el problema II.7).

II.16. Sean $|AA_1| = a$, $|BB_1| = b$, $|CC_1| = c$, $|A_1B_1| = x$, $|B_1C_1| = y$, $|C_1A_1| = z$. Entonces, $|AB_1|^2 = a^2 + x^2$, $|B_1C|^2 = c^2 + y^2$, etc. Ahora es fácil comprobar la condición del problema II.3.

II.17. Sea que $|AD| = x$, $|BD| = y$, $|CD| = z$, $|AB| = a$. Designemos con A_2, B_2, C_2 los puntos de tangencia de las circunferencias inscritas en los triángulos BCD, CAD, ABD con los lados BC, CA, AB. Las perpendiculares trazadas por los puntos A_1, B_1, C_1 hacia los lados BC, CA y AB coinciden con las perpendiculares levantadas a los mismos lados en los puntos A_2, B_2, C_2. Pero $|BA_2| = \frac{a+y-z}{2}$, $|A_2C| = \frac{a+z-y}{2}$; de manera análoga se encuentran $|AC_2|$, $|C_2B|$, $|AB_2|$, $|B_2C|$. Ahora es fácil comprobar el planteamiento del problema II.3.

II.18. Aplíquese la condición del problema II.3 tomando como puntos A, B y C los centros de las circunferencias y como puntos A_1, B_1, C_1, sendos puntos de intersección de las circunferencias (A_1 es uno de los puntos de intersección de las circunferencias con centros B y C, etc.).

II.19. Tomemos la tercera circunferencia con diámetro BC. Las cuerdas comunes de la 1ª y 3ª, así como de la 2ª y 3ª circunferencias son las alturas del triángulo bajadas desde los vértices B y C. Por consiguiente (véase el

problema II.18), la cuerda común de las circunferencias dadas también pasa por el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC.

II.20. Sea O el centro de la circunferencia dada; R, su radio; MC, la tangente a ésta. Tenemos: $|MO|^2 - |MN|^2 = |MO|^2 - |MB| \cdot |MA| = |MO|^2 - |MC|^2 = R^2$, es decir, el punto M se halla en la recta perpendicular a la recta ON (véase el problema II.1). Es fácil demostrar que todos los puntos de esta recta pertenecen a nuestro conjunto.

II.21. Supongamos que O es el centro de la circunferencia, r es el radio de la misma, $|OA| = a$, BC es cierta cuerda que pasa por A, M es el punto de intersección de las tangentes. Entonces $|OM|^2 = |BM|^2 + r^2$,

$$|AM|^2 = |BM|^2 - \frac{1}{4}|BC|^2 + \left(\frac{1}{2}|BC| - |BA|\right)^2 = |BM|^2 - |BC| \cdot |BA| + |BA|^2 = |BM|^2 - |BA| \cdot |AC| = |BM|^2 - r^2 + a^2.$$

De esta manera, $|OM|^2 - |AM|^2 = 2r^2 - a^2$, es decir (véase el problema II.1), el conjunto buscado de puntos es una recta perpendicular a OA. Esta recta se llama *polar del punto A respecto a la circunferencia dada*.

II.22. Muéstrese que si M_1 y M_2 son dos puntos diferentes que pertenecen a nuestro

conjunto, cualquier punto M del segmento de la recta M_1M_2 en el interior del triángulo también pertenece a este conjunto. Para eso, al designar con x_1, y_1, z_1 las distancias desde M_1 hasta los lados del triángulo y con x_2, y_2, z_2, las distancias desde M_2, podemos expresar las distancias x, y, z desde M hasta los lados mediante estas magnitudes y las distancias entre M_1, M_2, M. Así, por ejemplo, si $|M_1M| = k|M_1M_2|$ y las direcciones de M_1M y M_1M_2 coinciden, entonces $x = (1 - k) x_1 + kx_2$, $y = (1 - k) y_1 + ky_2$, $z = (1 - k) z_1 + kz_2$. De aquí se deduce que si la igualdad se cumple para tres puntos en el interior del triángulo que no se hallan en una recta, la misma se cumplirá para todos los puntos del triángulo. *Observación.* La afirmación del problema también será válida para un polígono convexo arbitrario. Más aún, pueden examinarse todos los puntos del plano, pero las distancias desde los puntos dispuestos a diferentes lados de la recta hasta esta última deben tomarse con signos opuestos.

II.23. Para que las distancias x, y, z sean lados de un triángulo, es necesario y suficiente que se cumplan las desigualdades $x < y + z$, $y < z + x$, $z < x + y$. Pero el conjunto de puntos, para los cuales, por ejemplo, $x = y + z$ es un segmento con los extremos situados en los pies de las bisectrices (en los pies de las bisectrices dos distancias son iguales, mientras que la tercera es igual a cero, por consiguiente, la igualdad se cumple: pero del problema anterior se deduce que esta igualdad es válida para todos los puntos

del segmento). *Respuesta*: el lugar geométrico buscado consta de los puntos dispuestos en el interior del triángulo con vértices en los pies de las bisectrices.

II.24. Puesto que las perpendiculares bajadas desde A_2, B_2 y C_2, respectivamente, sobre B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1 concurren en un punto, entonces (problema II.4) también las perpendiculares bajadas desde A_1, B_1 y C_1 sobre B_2C_2, C_2A_2 y A_2B_2 también concurren en un punto.

II.25. Designemos por a_1 y a_2 las distancias desde A hasta las rectas l_2 y l_3, respectivamente; b_1 y b_2 son las distancias desde B hasta las rectas l_3 y l_1, respectivamente; c_1 y c_2 son las distancias desde C hasta las rectas l_1 y l_2, respectivamente; x, y, z son las distancias desde A_1, B_1 y C_1, respectivamente, hasta l. Para que las perpendiculares bajadas desde A, B y C sobre B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1, respectivamente, se corten en un punto, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad (problema II.3) $|AB_1|^2 - |B_1C|^2 + |CA_1|^2 - |A_1B|^2 + |BC_1|^2 - |C_1A|^2 = 0$, o bien $(a_1^2 + y^2) - (c_2^2 + y^2) + (c_1^2 + x^2) - (b_2^2 + x^2) + (b_1^2 + z^2) - (a_2^2 + z^2) = 0$, lo que conduce a la condición $a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2 + c_1^2 - c_2^2 = 0$ que no depende de x, y, z.

II.26. Nos basta comprobar el cumplimiento de la condición (problema II.3)

$$|AB_2|^2 - |B_2C|^2 + |CA_2|^2 - |A_2B|^2 + |BC_2|^2 - |C_2A|^2 = 0.$$

Notemos que los triángulos BB_2C_1 y AA_2C_1 son semejantes, por consiguiente, $|AC_1| \times$

$\times |C_1B_2| = |BC_1| \cdot |C_1A_2|$, además, $\angle AC_1B_2 = \angle BC_1A_2$, por lo tanto, $|AB_2|^2 - |BA_2|^2 = (|AC_1|^2 - |C_1B|^2) + (|C_1B_2|^2 - |C_1A_2|^2)$. Después de escribir las igualdades correspondientes para $|CA_2|^2 - |AC_2|^2$ y $|BC_2|^2 - |CB_2|^2$ y sumarlas, obtenemos que las diferencias que figuran entre el primer paréntesis, en suma darán cero (aplicamos la condición del problema II.3 a los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$; obtendremos cero, puesto que las alturas se intersecan en un punto). No es difícil demostrar que AA_2, BB_2 y CC_2 pasan por el centro de la circunferencia circunscrita alrededor de ABC, es decir, la suma de diferencias entre el segundo paréntesis también es igual a cero.

II.32. Tracemos por K y L rectas paralelas a BC, hasta que se corten con la mediana AD en los puntos N y S. Sea $|AD| = 3a$, $|MN| = xa$, $|MS| = ya$. Puesto que $\frac{|LS|}{|NK|} = \frac{|AS|}{|AN|}$, $\frac{|LS|}{|NK|} = \frac{|MS|}{|MN|}$, entonces $\frac{|AS|}{|AN|} = \frac{|MS|}{|MN|}$, $\frac{(2+y)a}{(2-x)a} = \frac{y}{x}$, $y = \frac{x}{1-x}$. La igualdad $\frac{1}{|MK|} = \frac{1}{|ML|} + \frac{1}{|MP|}$ equivale a la igualdad $\frac{1}{|MN|} = \frac{1}{|MS|} + \frac{1}{|MD|}$, $\frac{1}{ax} = \frac{1}{ay} + \frac{1}{a}$. Poniendo $y = \frac{x}{1-x}$, obtenemos la igualdad lícita.

II.34. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD; aprovechando la semejanza de los triángulos correspondientes,

obtenemos $\frac{|OK|}{|OC|}=\frac{|OK|}{|OB|}\cdot\frac{|OB|}{|OC|}=\frac{|OA|}{|OD|}\times$ $\times\frac{|OM|}{|OA|}=\frac{|OM|}{|OD|}$, lo que se necesitaba.

II.35. Sean F y D los puntos de intersección de EN y EM con AB y BC, respectivamente. Demostremos que el $\triangle AFN$ y el $\triangle MDC$ son semejantes. Aprovechando las semejanzas de diferentes triángulos y la igualdad de los lados opuestos del paralelogramo, tendremos: $\frac{|NF|}{|FA|}=\frac{|NF|}{|FB|}\cdot\frac{|FB|}{|FA|}=\frac{|BD|}{|DM|}\times$ $\times\frac{|ED|}{|FA|}=\frac{|BD|}{|DM|}\cdot\frac{|DC|}{|FE|}=\frac{|BD|}{|DM|}\cdot\frac{|DC|}{|BD|}=$ $=\frac{|DC|}{|DM|}$, es decir, el $\triangle AFN$ es semejante al $\triangle MDC$.

II.36. La afirmación del problema se deduce de los dos hechos siguientes.

1) Si en los lados del cuadrilátero $ABCD$ se toman los puntos K, L, M y N de tal manera que los lados AB, BC, CD y DA estén divididos por estos puntos en razón igual $\left(\frac{|BK|}{|KA|}=\frac{|CM|}{|MD|}=\frac{|BL|}{|LC|}=\frac{|AN|}{|ND|}\right)$, también los segmentos KM y LN están divididos por su punto de intersección P en la misma razón.

En efecto, del hecho de que las rectas KL y NM son paralelas a la diagonal AC se deduce: $\frac{|KP|}{|PM|}=\frac{|KL|}{|NM|}=\frac{|KL|}{|AC|}\cdot\frac{|AC|}{|NM|}=$ $=\frac{|BK|}{|BA|}\cdot\frac{|AD|}{|ND|}=\frac{|BK|}{|BA|}\cdot\frac{|BA|}{|KA|}=\frac{|BK|}{|KA|}$.

2) Si en los lados AB y CD del cuadrilátero se toman los puntos K_1 y K, M_1 y M

de tal manera que $\frac{|K_1K|}{|AB|}=\frac{|M_1M|}{|CD|}=\frac{1}{m}$, $|AK_1|=|KB|$, $|DM_1|=|CM|$, el área del cuadrilátero K_1KMM_1 constituye $\frac{1}{m}$ parte del área del cuadrilátero $ABCD$. Efectivamente, $S_{BKC}=\frac{|BK|}{|BA|}S_{ABC}$, $S_{AM_1D}=\frac{|M_1D|}{|CD|}S_{ACD}=$ $=\frac{|BK|}{|BA|}S_{ACD}$. Por consiguiente, $S_{AKCM_1}=$ $=\left(1-\frac{|BK|}{|BA|}\right)S_{ABCD}=\frac{|AK|}{|BA|}S_{ABCD}$. En forma análoga $S_{K_1KMM_1}=\frac{|K_1K|}{|AK|}S_{AKCM_1}$. De esta manera, $S_{K_1KMM_1}=\frac{|K_1K|}{|AB|}S_{ABCD}=\frac{1}{m}S$.

II.37. Supongamos que K es el punto medio de DB, L es el punto medio de AC, $S_{ANM}=$ $=S_{CNM}$ (puesto que $|AL|=|LC|$), precisamente de la misma manera $S_{BNM}=$ $=S_{DMN}$; de donde se deduce la afirmación del problema.

II.38. Si M es el punto medio de DC, N es el punto medio de BC, K y L son los puntos de intersección de DN con AM y AB, respectivamente, entonces $\frac{|KM|}{|AK|}=\frac{|DM|}{|AL|}=$ $=\frac{1}{4}$, es decir, $|AK|=\frac{4}{5}|AM|$; por consiguiente, $S_{ADK}=\frac{4}{5}S_{ADM}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}S=\frac{1}{5}S$ (S es el área del paralelogramo). Así pues, el área de la figura buscada será $S-4S_{ADK}=\frac{1}{5}S$.

II.39. Supongamos que Q es el punto medio de AD, N, el punto medio de BC, M, el

punto medio de DC; K, P, R son los puntos de intersección de DN y AM, QC y DN, QC y AM. Entonces, $|DK| = \frac{2}{5}|DN|$, $|DP| = |PN|$, $|QP| = |PC|$, $|QR| = \frac{1}{3}|QC|$, $\frac{S_{RPQ}}{S_{QPD}} = \frac{|RP|}{|QP|} \cdot \frac{|KP|}{|DP|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$. $S_{RPK} = \frac{1}{15} \cdot \frac{S}{8} = \frac{S}{120}$.

Por consiguiente, del cuadrilátero examinado en el problema anterior se separan cuatro triángulos con el área $\frac{S}{120}$; de esta manera, el área del octágono buscado será $\frac{S}{5} - \frac{4S}{120} = \frac{S}{6}$.

II.40. Supongamos que la recta HC corta AB y LM en los puntos T y N, respectivamente, la recta AL corta ED en el punto K y la recta BM corta PG en el punto P. Tenemos $S_{ACDE} = S_{ACHK} = S_{ATNL}$, $S_{BCFG} = S_{BCHP} = S_{BMNT}$; de este modo, $S_{ACDE} + S_{BCFG} = S_{ABML}$.

II.41. Designemos con Q el área del pentágono; s_1, s_2 y s_3 son las áreas de los triángulos adyacentes a uno de los lados, a la base menor y a otro lado; x es el área del triángulo comprendido entre los triángulos, cuyas áreas son s_1 y s_2, y es el área del triángulo comprendido entre los triángulos de las áreas s_2 y s_3. Entonces, $s_1 + x + s_2 - s_2 + y + s_3 = \frac{1}{2}(x + y + s_2 + Q)$. De esta manera, $s_1 + x +$

$+ s_2 + s_2 + y + s_3 = x + y + s_2 + Q \Rightarrow$
$\Rightarrow s_1 + s_2 + s_3 = Q.$

II.42. Si S es el área del paralelogramo, entonces $S_{ABK} + S_{KCD} = \frac{1}{2}S$, por otra parte, $S_{DEC} = S_{EKC} + S_{KCD} = \frac{1}{2}S$, por lo tanto, $S_{ABK} = S_{EKC}$; en forma análoga $S_{AKD} = S_{KCF}$; sumando las dos últimas igualdades, obtenemos: $S_{ABKD} = S_{CEKF}$.

II.43. Tenemos: $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{S_{ACC_1}}{S_{CC_1B}} =$

$$= \frac{\frac{1}{2}|AC|\cdot|CC_1| \operatorname{sen}\angle ACC_1}{\frac{1}{2}|CC_1|\cdot|CB| \operatorname{sen}\angle O_1CB} = \frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle ACC_1}{\operatorname{sen}\angle C_1CB}.$$

Al obtener igualdades análogas para las relaciones $\frac{|BA_1|}{|A_1C|}$ y $\frac{|CB_1|}{|B_1A|}$ y multiplicándolas, obtenemos la afirmación requerida.

II.44. Demostremos que si las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 se intersecan en un punto (designémoslo por M), entonces $R^* = 1$ (y, por consiguiente, también $R = 1$; véase el problema II.43). Según el teorema de los senos para el $\triangle AMC$ tenemos: $\frac{\operatorname{sen}\angle ACC_1}{\operatorname{sen}\angle A_1AC} = \frac{|AM|}{|MC|}$. Al escribir igualdades análogas para los triángulos AMB y BMC y multiplicándolas, obtenemos la afirmación requerida. Inversamente, sea que $R = 1$ y todos los puntos A_1, B_1, C_1 (o sólo uno de éstos) se hallan en los lados del triángulo; al trazar las rectas AA_1 y BB_1, designamos el punto de su intersección con M_1; sea que la recta CM_1 corta AB en el punto C_2.

Tomando en consideración el planteamiento del problema y la necesidad demostrada de la condición $R = 1$, tendremos que $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AC_2|}{|C_2B|}$; además, los puntos C_1 y C_2 se hallan simultáneamente en el segmento AB o bien fuera de éste. Por consiguiente, C_1 y C_2 coinciden.

II.45. Supongamos que A_1, B_1, C_1 se hallan en una recta. Tracemos por C la recta paralela a AB y designemos con M el punto de su intersección con la recta A_1B_1. A partir de la semejanza de los triángulos correspondientes obtenemos: $\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|BC_1|}{|CM|} = \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CM|}{|AC_1|}$. Al sustituir las razones correspondientes en la expresión de R (véase el problema II.43) y haciendo uso de estas igualdades, obtenemos que $R = 1$. La afirmación inversa se demuestra de manera análoga a como esto se hizo en el problema II.44 (tracemos la recta B_1A_1 y designemos con C_2 el punto de su intersección con AB, etc.).

II.46. Compruébese que, si para las rectas dadas $R^* = 1$, también para las simétricas será lo mismo. Además, si la recta que pasa, por ejemplo, por el vértice A, corta el lado BC, también la recta simétrica a ésta respecto a la bisectriz del ángulo asimismo cortará el lado BC (véanse los problemas II.43, II.44).

II.47. Si A_0, B_0, C_0 son los puntos medios de los segmentos AO, BO, CO, respectivamente, las rectas construidas resultan simétricas a las rectas A_0O, B_0O, C_0O respecto a

las bisectrices del triángulo $A_0B_0C_0$ (véase el problema II.46).

II.48. a) Supongamos que la recta BM corta AC en el punto B' y la recta CK corta AB en C'. Tracemos por M una recta paralela a AC y designemos con P y Q los puntos de su intersección con AB y BC, respectivamente. Es evidente que $\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{|PM|}{|MQ|}$. Al trazar por K una recta paralela a AB y designando con E y F sus puntos de intersección con CA y CB, respectivamente, tendremos: $\frac{|BC'|}{|C'A|} = \frac{|FK|}{|KE|}$. Hagamos construcción análoga para el punto L. Sustituyendo las razones que figuran en R (véase el problema II.43), con ayuda de estas igualdades tendremos en cuenta que para cada segmento señalado en el numerador habrá otro, igual a éste, en el denominador, por ejemplo: $|PM| = |KE|$.

b) Para concretar supongamos que la recta l corta los segmentos C_0A, CA_0 y forma con OK el ángulo agudo φ. La recta A_1L divide el segmento MK (a partir del punto M) en la razón $\frac{S_{LMA_1}}{S_{LKA_1}}$. De manera análoga se encuentran las razones, en las cuales se dividen los lados KL y LM del triángulo KLM. Hemos de demostrar que tiene lugar la igualdad $R = 1$ (véase el problema II.43). Sustituyamos las razones de los segmentos por la razón entre las áreas de los triángulos correspondientes. La expresión R contendrá en el numerador S_{LMA_1} y en

el denominador, S_{KMC_1}. Demostremos que $\frac{S_{LMA_1}}{S_{KMC_1}} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$, donde A y C son los ángulos del triángulo ABC. Es evidente que $\frac{S_{B_0OA_0}}{S_{B_0OC_0}} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$. Además, $\angle A_1B_0A_0 = \angle C_0B_0A_0 + \angle A_1B_0C_0 = 90° - \frac{\angle B}{2} + \varphi$ (esto se deduce de que la circunferencia con el diámetro AO pasa por B_0, C_0 y A_1) y $\angle B_0A_1O + \angle B_0AO = \frac{\angle A}{2}$. Precisamente de la misma manera $\angle B_0C_1O = \frac{\angle C}{2}$ y $\angle C_1B_0C_0 = \left(90° - \frac{\angle B}{2}\right) + \angle C_1OL = \left(90° - \frac{\angle B}{2}\right) + (180° - \angle C - \angle B_0OC_1) = 90° - \frac{\angle B}{2} + (\angle B_0OA_1 - \angle C) = 90° - \angle B/2 + (180° - \angle A - \angle C - \varphi) = 90° + \angle B/2 - \varphi$, es decir, $\operatorname{sen} \angle A_1B_0A_0 = \operatorname{sen} \angle C_1B_0C_0$. Por consiguiente,

$$\frac{S_{A_1B_0A_0}}{S_{C_1B_0C_0}} = \frac{|B_0A_1| \cdot |B_0A_0|}{|B_0C_1| \cdot |B_0C_0|} = \frac{\operatorname{sen} \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

Sea r el radio de la circunferencia inscrita, $|OL| = |OK| = |OM| = a$. Tendremos:

$$\frac{S_{LMA_1}}{S_{KMC_1}} = \frac{S_{LOM} + S_{LOMA_1}}{S_{KOM} + S_{KOMC_1}} = \frac{\frac{a^2}{r^2} S_{A_0OB_0} + \frac{a}{r} S_{A_0OB_0A_1}}{\frac{a^2}{r^2} S_{C_0OB_0} + \frac{a}{r} S_{C_0OB_0C_1}} =$$

$$=\frac{\frac{a}{r}S_{A_0OB_0}+(S_{A_0B_0A_1}-S_{A_0OB_0})}{\frac{a}{r}S_{C_0OB_0}+(S_{C_0B_0C_1}-S_{C_0OB_0})}=$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{r}-1\right)S_{A_0OB_0}+S_{A_0B_0A_1}}{\left(\frac{a}{r}-1\right)S_{C_0OB_0}+S_{C_0B_0C_1}}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

(La última igualdad se deduce de que $\frac{S_{A_0OB_0}}{S_{C_0OB_0}}=\frac{S_{A_0B_0A_1}}{S_{C_0B_0C_1}}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$). Precisamente del mismo modo separamos en el numerador y el denominador de la representación R dos pares de magnitudes más, cuyas razones serán iguales a $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$ y $\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$, respectivamente. Por lo tanto, $R = 1$. Nos queda demostrar que el número de los puntos de intersección de las rectas LA_1, KC_1 y MB_1 con los segmentos KM, ML y LK, respectivamente, es impar.

II.49. Examinemos el triángulo ACE, por cuyos vértices están trazadas las rectas AD, CF y EB. Los senos de los ángulos formados por estas rectas con los lados del triángulo ACE son proporcionales a las cuerdas, en las cualés estos ángulos se apoyan: por consiguiente, la condición de $R = 1$ (véase el problema II.44) equivale a la condición dada en el problema.

II.50. Compruébese que la igualdad $R = 1$ se cumple (en el punto b) aprovechen el resultado del problema I.234) y que todos los tres puntos se hallan en las prolongaciones de los lados del triángulo. De esta manera nuestra

afirmación se deduce del teorema de Menelao (véase el problema II.45).

II.51. Según la propiedad de las secantes que parten de un punto exterior hacia la circunferencia o según la propiedad de los segmentos de cuerdas de la circunferencia que pasan por un punto, tendremos: $|BC_1| \times \times |BC_2| = |BA_1| \cdot |BA_2|$, $|CB_1| \times \times |CB_2| = |CA_1| \cdot |CA_2|$, $|AB_1| \times \times |AB_2| = |AC_1| \cdot |AC_2|$. Ahora es fácil comprobar que, si la afirmación del teorema de Ceva (igualdad $R = 1$) se cumple para los puntos A_1, B_1, C_1, ésta se verifica también para los puntos A_2, B_2, C_2. Además, de la afirmación del problema se deduce que los tres puntos A_2, B_2, C_2 o solamente uno de éstos se hallan en los lados correspondientes del triángulo (véase el problema II.44).

II.52. Después de escribir la igualdad $R = 1$ (según los teoremas de Ceva y de Menelao, véanse los problemas II.44 y II.45) para los puntos A_1, B_1, C_1; A_1, B_1, C_2; A_1, B_2, C_1; A_2, B_1, C_1 obtendremos que también para los puntos A_2, B_2, C_2 se cumple la igualdad $R = 1$. Ahora nos queda demostrar que los tres puntos A_2, B_2, C_2 se hallan en las prolongaciones de los lados del triángulo (así será, si los puntos A_1, B_1, C_1 se sitúan en los lados del triángulo) o solamente uno de ellos se encuentra en la prolongación (si en los lados del triángulo se halla uno de los puntos A_1, B_1, C_1) y hacer uso del teorema de Menelao (véase el problema II.45).

II.53. Hágase uso del teorema de Menelao (véase el problema II.45). En calidad de

vértices del triángulo dado tómense los puntos medios de los lados del triángulo ABC, en los lados y las prolongaciones de cuyos lados se hallan los puntos examinados.

II.54. Si a es la longitud del lado del pentágono $MKLNP$, b es la longitud del lado del pentágono con un lado en AB, c es la longitud del lado del pentágono con un lado en AC, entonces $\frac{|BA_1|}{|C_1B|}=\frac{a}{b}$, $\frac{|AC_1|}{|B_1A|}=\frac{b}{c}$, $\frac{|CB_1|}{|A_1C|}=\frac{c}{a}$. Al multiplicar estas igualdades, encontramos que $R=1$ y aplicamos el teorema de Ceva (problema II.44).

II.55. Compruébese que los puntos A_1, A_2, A_3 y B_1, B_2, B_3 se hallan en los lados del triángulo $O_1O_2O_3$ (O_1, O_2, O_3 son centros de las circunferencias) o en las prolongaciones de estos lados y que la razón de las distancias a partir de cada uno de estos puntos hasta los vértices correspondientes del triángulo $O_1O_2O_3$ es igual a la razón de los radios de las circunferencias correspondientes. Luego se puede aplicar el teorema de Menelao (véase el problema II.45) para cada uno de estos tres puntos.

II.56. La afirmación del problema se deduce de los problemas II.43, II.44.

II.58. Valgámonos de la igualdad $\frac{\operatorname{sen} \angle B_1AA_2}{\operatorname{sen} \angle A_2AC_1}=\frac{|AC_1|}{|AB_1|}\cdot\frac{|B_1A_2|}{|A_2C_1|}$. Al obtener igualdades análogas para otros ángulos y multiplicándolas, obtenemos nuestra afirmación a base de los resultados de los problemas II.43 y II.44.

II.59. Apliquemos el teorema de Menelao a los triángulos ABD, BDC y DCA (problema II.45*, observación): $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QD} \cdot \frac{DP}{PA} = -1$, $\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DQ}{QB} = -1$, $\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DR}{RC} \times \frac{CN}{NA} = -1$ (L, M y N son puntos de intersección de AB y PQ, BC y QR, AC y PR, respectivamente). Al multiplicar estas igualdades, obtenemos $\frac{CN}{NA} \cdot \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} = -1$, es decir, los puntos L, M y N se hallan en una recta.

II.60. Examinemos el sistema de coordenadas, cuyos ejes son las rectas dadas (es el llamado sistema de coordenadas «afín»). La ecuación de la recta en este sistema, como siempre, tiene la forma $ax + by + c = 0$. Primero demostremos la necesidad de la condición dada. Supongamos que el punto N tiene las coordenadas (u, v) y el punto M $(\lambda u, \lambda v)$, las ecuaciones de las rectas A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, respectivamente, tendrán la forma: $y - v = k_1 (x - u)$, $y - v = k_2 (x - u)$, $y - \lambda v = k_3 (x - \lambda u)$, $y - \lambda v = k_4 (x - \lambda u)$. Entonces, los puntos A_1, A_2, A_3, A_4 dispuestos en el eje x tendrán en este eje las coordenadas $u - \frac{1}{k_1} v$, $u - \frac{1}{k_2} v$, $\lambda u - \frac{\lambda}{k_3} v$, $\lambda u - \frac{\lambda}{k_4} v$, respectivamente, y los puntos B_1, B_2, B_3, B_4 dispuestos en el eje y tendrán las coordenadas $v - k_1 u$, $v - k_2 u$, $\lambda v - k_3 \lambda u$, $\lambda v - k_4 \lambda u$, respectivamente. Ahora es fácil comprobar el cumplimiento de la igualdad da-

da en el planteamiento. La suficiencia, como siempre, puede demostrarse por reducción al absurdo.

II.61. En los puntos a) y c) hace falta aplicar los teoremas de Ceva y de Menelao (problemas II.44* y II.45*, observación). En el punto b), además, se emplea el resultado del problema anterior; en este caso es cómodo, al igual que en el problema anterior, examinar el sistema de coordenadas afín, en el cual como ejes figuran las rectas AB y AC, mientras que los puntos B y C tienen las coordenadas (0; 1) y (1; 0).

II.62. Designemos con S el punto de intersección de las rectas A_1M, B_1L y C_1K. Apliquemos a los triángulos SMK, SKL y SLM el teorema de Menelao (problema II.45*, observación), obtenemos $\frac{KL_1}{L_1M} \cdot \frac{MA_1}{A_1S} \times \frac{SC_1}{C_1K} = -1$, $\frac{LM_1}{M_1K} \cdot \frac{KC_1}{C_1S} \cdot \frac{SB_1}{B_1L} = -1$, $\frac{MK_1}{K_1L} \cdot \frac{LB_1}{B_1S} \cdot \frac{SA_1}{A_1M} = -1$. Después de multiplicar estas igualdades obtenemos:

$$\frac{KL_1}{L_1M} \cdot \frac{LM_1}{M_1K} \cdot \frac{MK_1}{K_1L} = -1. \qquad (1)$$

La igualdad (1) es la condición necesaria y suficiente de que las rectas A_1M, B_1L y C_1K se corten en un punto. La necesidad ya está demostrada. La suficiencia se demuestra, como siempre, por reducción al absurdo. (Designemos con S' el punto de intersección de A_1M y B_1L, tracemos $S'C_1$, designando por K' su punto de intersección con la recta dada

y demostremos que K y K' coinciden.) Puesto que la igualdad (1) pasa a sí misma al sustituir K, L, M por K_1, L_1, M_1 y viceversa, la afirmación del problema resulta demostrada.

II.63. Aplicando el teorema de Ceva (problema II.44*, observación) a los triángulos ABD, BDC y CDA, obtenemos: $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BF}{FD}\times\frac{DE}{EA}=1$, $\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DF}{FB}=1$, $\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AE}{ED}\times\frac{DG}{GC}=1$. Al multiplicar estas igualdades, obtenemos: $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$, es decir, las rectas AQ, BR y CP se intersecan en un punto. Desígnémoslo por N. Sea T el punto de intersección de PG y DN. Según el teorema de Menelao (problema II.45*, observación) tenemos $\frac{DT}{TN}\cdot\frac{NP}{PC}\cdot\frac{CG}{GD}=-1$, de donde $\frac{DT}{TN}=-\frac{PC}{NP}\cdot\frac{GD}{CG}=-\frac{CP}{PN}\cdot\frac{GD}{CG}$. Si $\frac{AE}{ED}=\alpha$, $\frac{BF}{FD}=\beta$, $\frac{CG}{GD}=\gamma$, entonces $\frac{AP}{PB}=\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{CR}{RA}=\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{CN}{NP}=-\frac{BA}{PB}\cdot\frac{RC}{AR}=\frac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{CP}{PN}=-\left(1+\frac{CN}{NP}\right)=-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta}$. Por ende, $\frac{DT}{TN}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$. En la misma razón el segmento DN se divide por otras rectas.

II.64. Primero examinemos el caso límite, cuando el punto N se encuentra «en el infinito»; entonces, las rectas AN, BN y CN son

paralelas a la recta l. Sea que las distancias desde los puntos A, B y C hasta la recta l son iguales a a, b y c (por razones de comodidad supongamos que A, B y C se hallan a un lado de l). Las rectas paralelas a l que pasan por A, B y C, cortan las rectas B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1 en los puntos A_2, B_2, C_2, respectivamente. Es fácil ver que $\frac{|A_1C_2|}{|C_2B_1|} = \frac{a+c}{c+b}$, $\frac{|B_1A_2|}{|A_2C_1|} = \frac{b+a}{a+c}$; $\frac{|C_1B_2|}{|B_2A_1|} = \frac{c+b}{b+a}$. Multiplicando estas igualdades, vemos que se cumple la afirmación del teorema de Menelao, o sea, el problema 11.45 (hay que comprobar también que en las prolongaciones de los lados del triángulo $A_1B_1C_1$ se halla un número impar de puntos de A_2, B_2, C_2). Por lo tanto, los puntos A_2, B_2, C_2 se sitúan en una recta.

El caso general puede reducirse al examinado, si, por ejemplo, se proyecta la disposición prefijada de los triángulos desde cualquier punto del espacio sobre otro plano. Este punto puede elegirse de manera que no se altere la simetría de los triángulos y el punto N pase al infinito. Es posible no recurrir al examen tridimensional. Introduzcamos un sistema de coordenadas, tomando por el eje x la recta l y por el origen de coordenadas, el punto N. Hagamos la transformación $x' = 1/x$, $y' = y/x$. Además, los puntos del eje x $(y = 0)$ pasarán a la recta $y' = 0$; los puntos simétricos respecto al eje x pasarán a los simétricos respecto a la recta $y' = 0$; las rectas pasarán a rectas; las rectas que pasan por el origen de coordenadas, pasarán a rectas paralelas a la

recta $y' = 0$ (esta transformación, en esencia, es precisamente la proyección indicada arriba). Después de semejante transformación obtendremos la disposición ya examinada.

II.65. Consideremos que las rectas dadas son paralelas. Se puede lograrlo con ayuda de la proyección correspondiente o de la transformación de las coordenadas (véase la solución

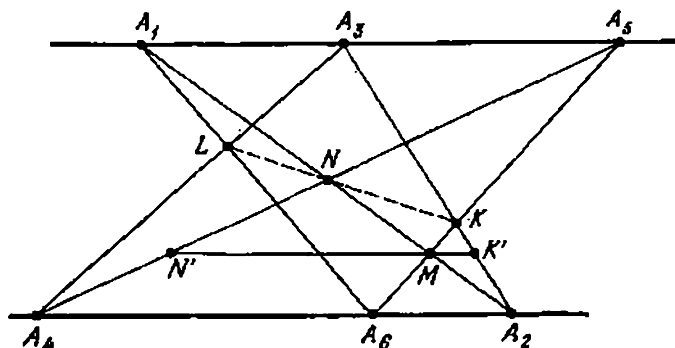


Fig. 16

del problema II.64). Apliquemos al triángulo A_1A_6M (fig. 16, $N'K'$ es paralela a las rectas dadas) el teorema de Menelao (problema II.45). Tendremos:

$$\frac{|A_1L|}{|LA_6|}\cdot\frac{|A_6K|}{|KM|}\cdot\frac{|MN|}{|NA_1|}=\frac{|A_1A_3|}{|A_4A_6|}\cdot\frac{|A_6A_2|}{|K'M|}\times$$
$$\times\frac{|MN'|}{|A_5A_1|}=\frac{|A_1A_3|}{|K'M|}\cdot\frac{|MN'|}{|A_4A_6|}\cdot\frac{|A_6A_2|}{|A_5A_1|}=\frac{|A_1A_2|}{|A_2M|}\times$$
$$\times\frac{|MA_5|}{|A_5A_6|}\cdot\frac{|A_6A_2|}{|A_5A_1|}=\frac{|A_1M|}{|A_2M|}\cdot\frac{|MA_5|}{|A_5M|}\cdot\frac{|A_2M|}{|MA_1|}=$$

$=1$. Por ende, los puntos L, N y K se encuentran en una recta. Se podría, en correspondencia con la observación a los proble-

mas II.44 y II.45, examinar en vez de $\frac{|A_1L|}{|LA_6|}$, etc., las relaciones $\frac{A_1L}{LA_6}$, etc. En este caso, el producto de las razones correspondientes será igual a (-1).

II.67. El lugar geométrico de puntos buscado consta de dos rectas que pasan por el punto simétrico al punto A con respecto a la recta l, y que forman ángulos de 60° con la recta l.

II.68. El conjunto buscado es el arco BC de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$, siendo aquél correspondiente al ángulo central de 120°.

II.69. Si N es el punto de intersección de las rectas PQ y AB, entonces $\frac{|CN|}{|AN|} = \frac{|PC|}{|AQ|} = \frac{|CB|}{|AC|}$, es decir, N es un punto fijo. El conjunto buscado es una circunferencia con diámetro CN. Si ahora M es el punto fijo, entonces D se halla en la recta paralela a la recta MN que pasa por tal punto fijo L en la recta AB, para el cual $\frac{|AL|}{|LB|} = \frac{|AN|}{|CN|}$; además, L está dispuesto respecto al segmento AB del mismo modo que N respecto al segmento AC.

II.70. Designemos con φ el ángulo entre BD y AC; $S_{APK} = \frac{1}{2}|AK|\cdot|PD|\,\text{sen}\,\varphi$, $S_{BPC} = \frac{1}{2}|BP|\cdot|DC|\,\text{sen}\,\varphi = \frac{1}{2}|BP|\cdot|AD|\,\text{sen}\,\varphi$. Puesto que $S_{APK} = S_{BPC}$, entonces $|AK| \times |PD| = |BP|\cdot|AD|$ o bien $\frac{|AK|}{|AD|}\cdot\frac{|PD|}{|BP|} =$

$=1$, pero según el teorema de Menelao para $\triangle BDK$ (véase el problema II.45) $\frac{|AK|}{|AD|}\times$ $\times\frac{|DP|}{|PB|}\cdot\frac{|BM|}{|MK|}=1$ (M es el punto de intersección de AP y BK), por consiguiente, $|BM|=|MK|$, es decir, el lugar geométrico de puntos buscado es la línea media del $\triangle ABC$, paralela al lado AC (pero si los puntos P y K se toman en las rectas AC y BD, obtenemos la recta paralela al lado AC, que pasa por los puntos medios de los segmentos AB y BC).

II.71. Sea C el vértice del ángulo dado; β, su magnitud. Bajemos desde O las perpendicu-

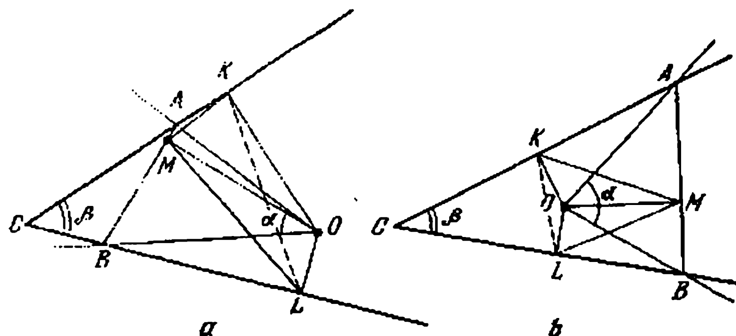


Fig. 17

lares OK y OL sobre los lados del ángulo (fig. 17, a). Alrededor del cuadrilátero $OKAM$ se puede circunscribir una circunferencia. Por consiguiente, $\angle KMO=\angle KAO$. De manera análoga, $\angle OML=\angle OBL$. Por lo tanto, $\angle KML=\angle KAO+\angle OBL=\alpha+\beta$, es decir, M se halla en el arco de la circunferencia que pasa por K y L y contiene el ángulo $\alpha+$ $+\beta$; además, todos los puntos de este arco

pertenecen a nuestro conjunto. Si $\alpha \leqslant \beta$, entonces con esto se agota nuestro conjunto. Pero si $\alpha > \beta$, se agregan los puntos M por el otro lado de la recta KL, para los cuales $\angle KML = \alpha - \beta$ (fig. 17, b); además, será un conjunto de puntos el par de arcos, cuyos extremos se determinarán por las posiciones límites del ángulo AOB. Si los rayos del ángulo inmóvil β y del móvil α se prolongan, o sea, en vez de los ángulos se examinan pares de rectas, el conjunto buscado será un par de circunferencias (que contienen ambos arcos, de los cuales hemos hablado antes).

II.72. Examinemos el cuadrilátero $DEPM$, $\angle DEM = \angle DPM = 90°$, por consiguiente, este cuadrilátero es inscrito. Por lo tanto, $\angle DME = \angle DPE = 45°$. El lugar geométrico de puntos buscado es la recta DC.

II.73. Examinemos el caso, en que el punto B se halla en el interior del ángulo dado. En primer lugar, notemos que todos los $\triangle BCD$ (fig. 18) que se obtienen, son semejantes entre sí, puesto que $\angle BCD = \angle BMD$, $\angle BDC = \angle BMC$. Por eso, si N es el punto medio de CD, los ángulos BNC y BND serán constantes. Circunscribamos alrededor del $\triangle BNC$ una circunferencia. Sea K el segundo punto de intersección de esta circunferencia con MC. Puesto que $\angle BKM = 180° - \angle BNC$, el punto K resulta fijo. De manera análoga será fijo el punto L que es el segundo punto de intersección de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle BND$ con la recta MD. Además, $\angle LNK = \angle LNB + \angle BNK = 180° - \angle BDM + \angle BCK = 180°$, es decir, N se

halla en la recta LK. El conjunto de puntos N es el segmento LK y el lugar geométrico de centros de masas del $\triangle MCD$ será el segmento paralelo a aquél que divide MK en razón de

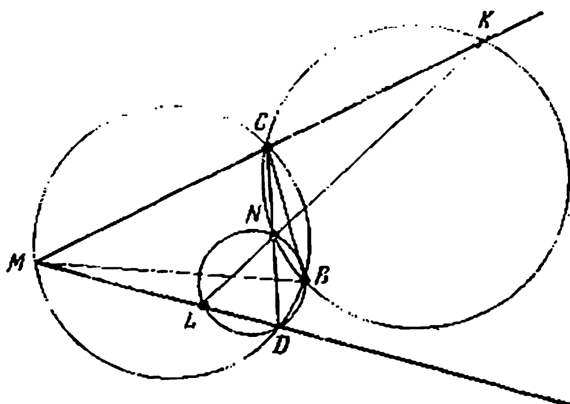


Fig. 18

2:1 (se obtiene con ayuda de la homotecia con el centro en M y la razón 2/3).

II.74. Si O es el vértice del ángulo y $ABCD$ es un rectángulo (A es fijo), los puntos A, B, C, D, O se hallan en una circunferencia. Por consiguiente, $\angle COA = 90°$, es decir, el punto C se encuentra en la recta perpendicular a OA, que pasa por O.

II.75. Notemos que todos los triángulos ABC que se obtienen, son semejantes entre sí. Por consiguiente, si en cada triángulo se toma el punto K que divide el lado BC en una misma razón, puesto que $\angle AKC$ conserva el valor constante, el punto K describirá una circunferencia. Por lo tanto, el punto M que divide

AK en razón constante, también circunscribirá una circunferencia que se obtiene de la anterior con ayuda de la homotecia con el centro en el punto A y la razón $k = |AM|/|AK|$. Este razonamiento se emplea en todos los puntos: a), b) y c).

II.76. Sea K el punto medio de AB y M, el pie de la perpendicular bajada desde K sobre AC. Todos los triángulos AKM son semejantes entre sí (por dos ángulos), por consiguiente, lo serán también todos los triángulos ABM. De este modo es fácil obtener que el lugar geométrico de puntos buscado sea la circunferencia con cuerda BC; además, los ángulos que se apoyan sobre esta cuerda, son iguales al ángulo AMB o al complementario a éste. (El arco menor de esta circunferencia está dispuesto al mismo lado de BC que el arco menor de la circunferencia de partida.)

II.77. Si M, N, L y K son puntos dados (M y N se hallan en lados opuestos del rec-

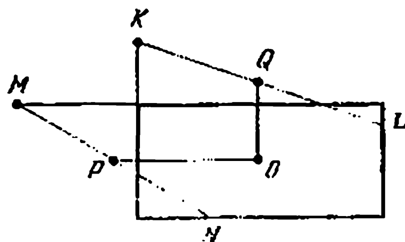


Fig. 19

tángulo, L y K, también), P es el punto medio de MN, Q es el punto medio de KL, O es el punto de intersección de las diagonales del rectángulo (fig. 19), entonces $\angle POQ = 90°$.

Por consiguiente, el punto geométrico de puntos buscado será la circunferencia construida sobre PQ como sobre el diámetro.

II.78. Designemos los radios de las circunferencias dadas por R y r ($R \geqslant r$), el punto de tangencia de la cuerda BC con la circunferencia menor, por D; sean K y L los puntos de intersección de las cuerdas AC y AB con la circunferencia menor y, por fin, O, el centro de la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$. Puesto que las dimensiones angulares de los arcos AK y AC son iguales, entonces $|AK| = rx$, $|AC| = Rx$; de aquí obtenemos $|DC|^2 = |AC| \cdot |CK| = (R-r) Rx^2$. En forma análoga $|AB| = Ry$, $|DB|^2 = (R-r) Ry^2$; por consiguiente, $\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{x}{y} = \frac{|AC|}{|AB|}$, es decir, AD es la bisectriz del ángulo BAC. A continuación tenemos: $\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{Rx}{\sqrt{(R-r) Rx}} = \sqrt{\frac{R}{R-r}}$.

De este modo, el lugar geométrico de puntos buscado será la circunferencia tangente por interior a las dos dadas en el mismo punto A, con el radio $\rho = r \frac{|AO|}{|AD|} = \frac{r\sqrt{R}}{\sqrt{R}+\sqrt{R-r}}$.

II.79. Sean O_1 y O_2 los centros de las circunferencias dadas, la recta O_1O_2 corta las circunferencias en los puntos A, B, C, D (sucesivamente). Examinemos dos casos.

a) El rectángulo $KLMN$ está dispuesto de tal manera que los vértices opuestos K, M se hallan en una circunferencia y L y N, en la otra. En este caso, si P es el punto de inter-

sección de las diagonales (fig. 20, *a*), entonces $|O_1P|^2 - |O_2P|^2 = (|O_1K|^2 - |KP|^2) - (|O_2L|^2 - |LP|^2) = |O_1K|^2 - |O_2L|^2 = R_1^2 - R_2^2$, donde R_1 y R_2 son los radios de las circunferencias, es decir, el punto

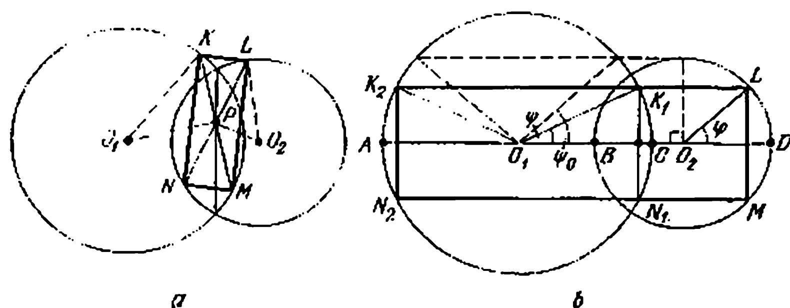


Fig. 20

P se halla en la cuerda común de las circunferencias; además, se excluyen el punto medio de la cuerda común y sus extremos, puesto que en este caso el rectángulo degenera.

b) Dos vértices vecinos del rectángulo *KLMN* se hallan en una circunferencia y los otros dos, en la otra. Puesto que las perpendiculares bajadas desde O_1 sobre *KN* y desde O_2 sobre *LM* deben dividirlos por la mitad, la recta O_1O_2 es el eje de simetría del rectángulo *KLMN*.

Sea que $R_2 < R_1$ y el radio O_2L forma el ángulo φ con la línea de centros. Tracemos por *L* la recta paralela a O_1O_2. Esta recta cortará la circunferencia O_1 en dos puntos K_1 y K_2 y al punto *L* le corresponderán dos rectángulos: K_1LMN_1 y K_2LMN_2 (fig. 20, *b*). Al variar

φ desde 0 hasta $\pi/2$, el ángulo ψ formado por el radio O_1K_1 y el rayo O_1O_2 cambia desde 0 hasta cierto valor ψ_0; al seguir variando φ (desde $\pi/2$ hasta π) ψ disminuye desde ψ_0 hasta 0. En este caso los centros de los rectángulos K_1LMN_1 trazarán un segmento desde el punto medio de CD hasta el punto medio de BC, excluyendo los puntos extremos y el punto de intersección de este segmento con la cuerda común. De manera análoga, los centros de los rectángulos K_2LMN_2 llenarán el intervalo con los extremos en los puntos medios de AB y AD (los extremos del intervalo no forman parte de nuestro lugar geométrico de puntos).

Si los tres vértices del rectángulo y, por consiguiente, también el cuarto se hallan en una circunferencia, el centro del rectángulo coincide con el centro de la circunferencia correspondiente.

De esta manera, el lugar geométrico de puntos buscado es la unión de tres intervalos: los extremos del primero son los puntos medios de AB y AD, los extremos del segundo son los puntos medios de BC y CD, los extremos del tercero son los puntos de intersección de las circunferencias. Al mismo tiempo se excluye el punto medio de la cuerda común.

II.80. Si B y C son los puntos primero y segundo de reflexión, O es el centro, entonces BO es la bisectriz del ángulo CBA. El trayecto de la bola es simétrico respecto al diámetro que contiene C, por eso A se halla en este diámetro. Si $\angle BCO = \angle CBO = \varphi$, entonces $\angle ABO = \varphi$, $\angle BOA = 2\varphi$; aplicando el teorema de los senos al $\triangle ABO$ ($|BO| = R$,

$|OA| = a$), obtenemos: $\frac{R}{\text{sen } 3\varphi} = \frac{a}{\text{sen } \varphi}$, de donde $\cos 2\varphi = \frac{R-a}{2a}$ y cuando $a > \frac{R}{3}$, se puede encontrar φ. *Respuesta*: los puntos dispuestos fuera de la circunferencia del radio $R/3$ con el centro en el centro de la mesa de billar.

II.81. El lugar geométrico de puntos buscado son dos rectas perpendiculares a las rectas dadas.

II.82. Si la recta AB no es paralela a l, existen dos circunferencias que pasan por A y B y son tangentes a l. Supongamos que sus centros son O_1 y O_2. El lugar geométrico de puntos buscado es la recta O_1O_2, excluyendo el intervalo (O_1O_2). Si AB es paralela a l, el lugar geométrico de puntos buscado consta de un rayo perpendicular a l.

II.83. a) Sea A (fig. 21) el vértice de cierto triángulo. Prolonguemos el segmento AM más allá de M en la magnitud $|MN| = \frac{1}{2}|AM|$. El punto N es el punto medio del lado opuesto al vértice A, por consiguiente, N ha de situarse en el interior de la circunferencia circunscrita, es decir, en el interior de la circunferencia con el centro en O y el radio $|OA|$. Bajemos desde O la perpendicular OR sobre AN. Debe cumplirse la desigualdad $|AR| > |RN|$. Si $\angle AMO \geqslant 90°$, esta desigualdad se cumple automáticamente. Pero si $\angle AMO < 90°$, entonces $|AM| - |MR| > |MN| + |MR| \Rightarrow |AM| - \frac{1}{2}|AM| >$

$> 2\,|MR| \Rightarrow |AM| > 4\,|MR|$. Empero R se halla en la circunferencia α con el diámetro OM, por lo tanto A debe estar fuera de la circunferencia homotética a la circunferencia α con la razón 4 y el centro de homotecia en M.

Fig. 21

Luego, el punto N no debe estar en la circunferencia α, puesto que, en caso contrario el lado del triángulo, cuyo punto medio es N, siendo perpendicular a ON, se hallaría en la recta AN, es decir, todos los vértices del triángulo se encontrarían en una recta. Por consiguiente A no debe disponerse en la circunferencia homotética a α con el centro de homotecia M y la razón igual a -2. De esta manera, si en la recta OM tomamos sucesivamente los puntos L y K de tal modo que $|LO| : |OM| : |MK| = 3 : 1 : 2$, y construimos sobre LM como sobre diámetro la circunferencia *1*, sobre MK, la circunferencia *2*, serán lugar geométrico de puntos buscado todos

los puntos fuera de la circunferencia *1*, excluyendo los de la circunferencia *2*, menos el punto K (el punto K forma parte de nuestro lugar geométrico de puntos).

b) Si O es el centro del círculo circunscrito, M es el centro de masas del triángulo, entonces K (véase el punto a)) será el punto de intersección de las alturas del triángulo (véase el problema I.20). Pero para el triángulo obtusángulo la distancia desde el centro del círculo circunscrito hasta el punto de intersección de las alturas es mayor que el radio del círculo circunscrito. Por consiguiente, los vértices del triángulo obtusángulo se encuentran en el interior de la circunferencia *3* construida sobre LK como sobre diámetro, fuera de la circunferencia *1* y excluyendo los puntos de la circunferencia *2* (además, los vértices de los ángulos obtusos se hallan en el interior de la circunferencia *2*).

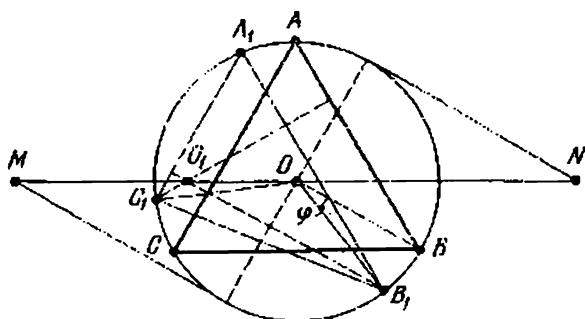


Fig. 22

II.84. Sea ABC (fig. 22) el rectángulo regular de partida; $A_1B_1C_1$, un triángulo arbitrario, en el cual $A_1C_1 \parallel AC$, $A_1B_1 \parallel AB$, O

es el centro del círculo, O_1 es el punto de intersección de las alturas del $\triangle A_1B_1C_1$. Sea que $\angle BOB_1 = \varphi$. Puesto que $O_1B_1 \parallel OB$, entonces $\angle OB_1O_1 = \varphi$; dado que $\angle C_1O_1B_1 = \angle C_1OB_1 = 120°$, resulta que el cuadrilátero $C_1O_1OB_1$ está inscrito en cierta circunferencia y, por lo tanto, $\angle O_1OC_1 = \angle O_1B_1C_1 = 30° - \varphi$. De esta manera, $\angle O_1OB = \varphi + 120° + 30° - \varphi = 150°$, es decir, la recta OO_1 es paralela a CB. Para determinar cuán lejos puede «apartarse» el punto O_1 de esta recta, notemos que para determinar la posición del punto O_1 hay que trazar por el punto variable B_1 una recta paralela a OB hasta que se interseque con la recta que pasa por O paralelamente a CB. Es evidente que los puntos más alejados se obtendrán para los extremos del diámetro perpendicular a OB. Conque, MN será parte de nuestro lugar geométrico de puntos, o sea, un segmento de la recta paralela a CB, con longitud igual a $4R$ y el punto medio en O, mientras que serán todo el lugar geométrico de puntos tres segmentos semejantes (se excluyen los extremos de los seg entos).

II.85. Si ABC (fig. 23) es el triángulo dado y el vértice del rectángulo circunscrito $AKLM$ coincide con A (B se encuentra en KL; C, en LM), entonces L pertenece a la semicircunferencia con diámetro BC; además, los ángulos ABL y ACL son obtusos, es decir, L puede tener dos posiciones extremas: L_1 y L_2, $\angle L_1CA = \angle L_2BA = 90°$; el centro O describirá un arco, homotético al arco L_1L_2, con el centro de homotecia en A y la razón $1/2$. *Respuesta*: si el triángulo es acutángulo, el

conjunto buscado es un triángulo curvilíneo, formado por los arcos de las semicircunferencias construidas sobre las líneas medias como sobre diámetros y dirigidas al interior del triángulo de las líneas medias; pero si el triángulo no es acutángulo, el conjunto buscado

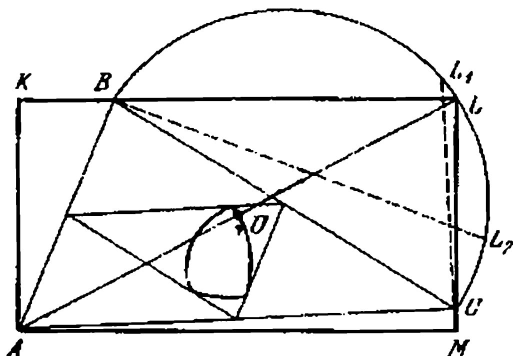


Fig. 23

está formado por dos arcos de las semicircunferencias construidas de la misma manera sobre dos líneas medias menores.

II.86. Si el primer cuadrado (fig. 24) gira alrededor del punto M en 60° en sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario, el mismo debe caber por completo en el interior del segundo. Inversamente, a cada cuadrado dispuesto en el interior del mayor, siendo aquél igual al menor, cuyos lados forman ángulos de 30° y 60° con los lados del mayor, le corresponde el punto M que posee la propiedad necesaria. (En la figura este cuadrado se designa con la línea de trazos.) Este punto será el

centro de giro a 60°, que hace pasar el cuadrado $ABCD$ al cuadrado $A_1B_1C_1D_1$; se puede obtenerlo a partir del O_1, girando en dirección necesaria alrededor de O en 60°. Examinemos las posiciones extremas de los cuadrados $A_1B_1C_1D_1$ (cuando dos vértices están en los

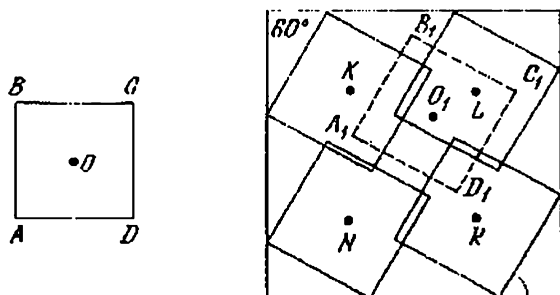


Fig. 24

lados del cuadrado mayor). Sus centros sirven de vértices para el cuadrado $KLRN$, cuyo lado, respectivamente, es igual a $b - \frac{1}{2}a(\sqrt{3}+1)$ (los lados del cuadrado $KLRN$ son paralelos a los lados de los cuadrados dados, el centro coincide con el centro del mayor). Los centros de otra familia de cuadrados que forman con los lados del cuadrado mayor los ángulos de 30° y 60°, también llenan el cuadrado $KLRN$. De esta manera, el lugar geométrico de puntos buscado está formado por la reunión de dos cuadrados, uno de los cuales se ha obtenido a partir del cuadrado $KLRN$, girando éste alrededor de O en 60° en un sentido, y el otro, girando en 60° en sentido contrario.

El problema tiene solución, si $b \geqslant \geqslant \frac{a}{2}(\sqrt{3}+1)$ (los puntos P y Q pueden hallarse en la frontera de sus cuadrados).

II.87. Semejante punto M es único, o sea, es el centro de masas del triángulo (punto de intersección de las medianas). Es fácil descubrir que en este caso para cualquier punto N en la frontera del triángulo como punto P puede tomarse uno de los vértices del triángulo. Tomemos cualquier otro punto M_1. Consideremos que este punto se encuentra en el interior o en la frontera del $\triangle AMD$, donde M es el centro de masas del $\triangle ABC$, D es el punto medio de AC. Tracemos por M_1 la recta paralela a BD y como N tomemos el punto de intersección de esta recta con AD, designando con M_2 el punto de su intersección con AM. Es evidente que para cualquier punto P en el interior o en la frontera del triángulo el área del $\triangle M_1NP$ no supera el área de uno de los triángulos AM_2N, M_2NC, M_2NB. Es evidente también que

$S_{AM_2N} < S_{AMD} = \frac{1}{6}S$. Luego, si $|AD| = |DC| = a$, $|ND| = x$, entonces $\frac{S_{M_2NC}}{S_{MDC}} = \frac{|M_2N|}{|MD|}\cdot\frac{|NC|}{|DC|} = \frac{a^2-x^2}{a^2} \leqslant 1$. Por fin, $\frac{S_{M_2NB}}{S_{AMD}} = \frac{|M_2N|}{|MD|}\cdot\frac{|ND|}{|AD|} = \frac{(a-x)x}{a^2} < 1$.

II.88. Si A, B, C son los ángulos del $\triangle ABC$, los ángulos del $\triangle ABI$ son iguales a $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $90^\circ + \frac{C}{2}$ (fig. 25); por consiguiente,

el lugar geométrico de puntos buscado es un par de triángulos, cuyos lados son segmentos de rectas, mientras que el tercero es el arco

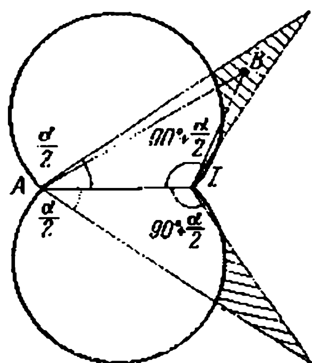


Fig. 25

que es parte del segmento construido en AI, el cual contiene el ángulo $\alpha/2$.

II.89. Levantemos en el punto M la perpendicular respecto a BM; sea P el punto de intersección de esta perpendicular con la perpendicular levantada en el punto B hacia la recta de partida. Mostremos que la magnitud $|PB|$ es constante. Sea que $\angle MBC = \varphi$; designemos con K y L los pies de las perpendiculares bajadas desde A y C sobre MB. Según el planteamiento,

$\frac{|MK|}{|KA|} + \frac{|LM|}{|LC|} = k$, pero $|LC| = |BC| \operatorname{sen} \varphi$, $|AK| = |BA| \operatorname{sen} \varphi$. Por lo tanto, $\frac{|MK|}{|BA| \operatorname{sen} \varphi} +$

$$+ \frac{|LM|}{|BC| \operatorname{sen} \varphi} = k \Leftrightarrow \frac{|BM| \pm |BK|}{|BA| \operatorname{sen} \varphi} +$$

$$+\frac{|BM| \mp |BL|}{|BC| \operatorname{sen}\varphi}=k \Leftrightarrow \frac{|BM|}{\operatorname{sen}\varphi}\left(\frac{1}{|BA|}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{|BC|}\right) \pm \left(\frac{|BK|}{|BA| \operatorname{sen}\varphi}-\frac{|BL|}{|BC| \operatorname{sen}\varphi}\right)=$$
$$=k \Leftrightarrow \frac{|BM|}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{k|BA| \cdot |BC|}{|BA|+|BC|} \Leftrightarrow |PB|=$$
$$=\frac{k|BA| \cdot |BC|}{|BA|+|BC|},$$ lo que había que demostrar. Por consiguiente, el lugar geométrico de puntos buscado son dos circunferencias tangentes a la recta AC en el punto B, con diámetros iguales a $\frac{k|BA| \cdot |BC|}{|BA|+|BC|}$.

II.90. Prolonguemos AQ más allá del punto Q y tomemos en este rayo el punto M de manera que $|QM|=\frac{1}{2}|AQ|$, y el punto A_1 de tal modo que $|MA_1|=|AM|$; M es el punto medio del lado BC del triángulo ABC; $\angle CBA_1=\angle BCA$, $\angle ABA_1=180°-\angle BAC$.

Por consiguiente, si sobre AM, MA_1 y AA_1 construimos circunferencias como sobre diámetros, el lugar geométrico de puntos buscado estará formado por los puntos dispuestos fuera de las primeras dos circunferencias y en el interior de la tercera circunferencia.

II.91. Examínense los 4 casos: el triángulo ABC es acutángulo; uno de los ángulos A, B o C es obtuso. En todos los casos se puede expresar las magnitudes de los ángulos del triángulo ABH por medio de los ángulos del triángulo ABC.

II.92. Si los extremos de los rayos no coinciden, el lugar geométrico de puntos buscado está formado por partes de las líneas siguien-

tes: las bisectrices de dos ángulos formados por las rectas que contienen los rayos dados, la mediatriz hacia el segmento que une los extremos de los rayos, y dos parábolas (parábola es el lugar geométrico de puntos equidistantes del punto dado y de la recta dada). Si los extremos de rayos coinciden, el lugar geométrico de puntos buscado consta de la bisectriz del ángulo formado por los rayos, y de una parte del plano en el interior del ángulo originado por las perpendiculares levantadas en los extremos de los rayos.

II.93. Sea A el vértice del ángulo. Se puede demostrar que el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle MON$, coincide con el punto de intersección de la bisectriz AO y de la circunferencia circunscrita alrededor del AMN. Sea α la magnitud del ángulo; r, el radio de la circunferencia; K, el punto medio de AO. Tomemos en la bisectriz AO los puntos L y P de manera que

$$|AL| = \frac{r}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad |AP| = \frac{r}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

El lugar geométrico de puntos buscado consta del segmento KL (al mismo tiempo K no forma parte de este conjunto y L sí) y del rayo que yace en la bisectriz, con el origen en P.

II.94. Designemos: O_1, O_2 son los centros de circunferencias; r_1, r_2, sus radios, M es el punto medio de AB, O, el punto medio de O_1O_2. Tenemos (según la fórmula de la longi-

tud de la mediana, problema I.11) $|O_1M|^2 = \frac{1}{4}(2r_1^2 + 2|O_1B|^2 - |AB|^2)$, $|O_2M|^2 = \frac{1}{4}(2r_2^2 + 2|O_2A|^2 - |AB|^2)$,

$$|O_1B|^2 = \frac{1}{2}(|O_1O_2|^2 + 4|OB|^2 - 2r_2^2),$$

$$|O_2A|^2 = \frac{1}{2}(|O_1O_2|^2 + 4|OA|^2 - 2r_1^2).$$

De esta manera, $|O_1M|^2 - |O_2M|^2 = r_1^2 - r_2^2$, es decir (problema II.1), los puntos M están dispuestos en la perpendicular trazada hacia O_1O_2. Si las circunferencias de radios diferentes no se intersecan, el lugar geométrico de puntos buscado consta de dos segmentos que se obtienen de la manera siguiente: en el segmento con los extremos en los puntos medios de las tangentes exteriores comunes hay que eliminar los puntos, dispuestos entre los puntos medios de las tangentes interiores comunes (si M es el punto del segmento con los extremos en los puntos medios de las tangentes interiores comunes, la recta que pasa por M perpendicularmente a OM, no corta las circunferencias). En los demás casos (las circunferencias se intersecan o son iguales) el lugar geométrico de puntos buscado es todo el segmento con los extremos en los puntos medios de las tangentes exteriores comunes.

II.95. a) Puesto que $\angle FNB = 90°$, $\angle CNM = 135°$, $\angle FNM = 45°$ (supongamos que $|AM| > |MB|$), entonces $\angle FNC = 90°$ y C, N y B se hallan en una recta, etc.

b) Examinemos el triángulo rectángulo isósceles ABK con la hipotenusa AB (K está

por el otro lado de AB que los cuadrados). El cuadrilátero $ANBK$ es inscrito, por consiguiente, $\angle ANK = \angle ABK = 45°$, es decir, NK pasa por M.

El lugar geométrico de puntos buscado es la línea media del triángulo ALB, donde L es el punto simétrico al punto K con respecto a AB.

II.96. Sea N el punto de intersección de la mediatriz y de la tangente; O, el centro de la circunferencia; R, su radio. Tenemos: $|ON|^2 - |NA|^2 = R^2 + |MN|^2 - |NA|^2 = R^2$. De esta manera, el lugar geométrico de puntos buscado es la recta perpendicular a OA (problema II.1).

II.97. Si O_1 y O_2 son los centros de las circunferencias dadas, Q_1 y Q_2 son los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos ABC_1 y AB_1C, entonces $O_1Q_1O_2Q_2$ es un paralelogramo. La recta Q_1Q_2 pasa por el punto medio del segmento O_1O_2 (punto D). El segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos ABC_1 y AB_1C es simétrica al punto A respecto a la recta Q_1Q_2. El lugar geométrico de puntos buscado es la circunferencia con el centro en el punto D y el radio $|AD|$.

II.98. Sean O_1 y O_2 los centros de las circunferencias dadas; r_1 y r_2, sus radios. Veamos dos triángulos rectángulos isósceles con la hipotenusa O_1O_2: O_1O_2O y O_1O_2O'. El lugar geométrico de puntos buscado son dos anillos con centros los O y O' y los radios: exterior $\frac{\sqrt{2}}{2}(r_1 + r_2)$ e interior $\frac{\sqrt{2}}{2}|r_1 - r_2|$. De-

mostrémoslo. Sea M un punto en la circunferencia O_1; N, en la circunferencia O_2. Si M es fijo y N recorre la segunda circunferencia, los vértices de los ángulos rectos de los triángulos rectángulos isósceles describen dos circunferencias de radio $\frac{\sqrt{2}}{2} r_2$ que se obtienen a partir de la circunferencia O_2 girando alrededor de M a un ángulo de 45° (en un sentido y en otro) mediante la homotecia ulterior con el centro en M y la razón $\sqrt{2}/2$. Sea O_M el centro de una de estas circunferencias. El punto O_M se ha obtenido a partir de O_2 girando alrededor de M en el sentido correspondiente y mediante la homotecia con el centro M y la razón $\sqrt{2}/2$. Pero O_M puede obtenerse mediante el giro correspondiente y la homotecia con el centro O_2. Por consiguiente, cuando M describe la circunferencia O_1, O_M describe una circunferencia de radio $\frac{\sqrt{2}}{2} r_1$ con el centro en O u O'.

II.99. La unión de tres paralelogramos construidos es un paralelogramo circunscrito alrededor del triángulo dado, dividido en cuatro menores. No es difícil expresar las razones, en las cuales cada una de las diagonales examinadas se divide por otra diagonal, por medio de los segmentos de lados del paralelogramo mayor.

Si los paralelogramos son rectángulos, trasladando paralelamente dos de las tres diagonales examinadas, formemos con éstas un triángulo igual al dado; pero esto significa que los

ángulos entre éstas son iguales a los ángulos correspondientes del triángulo o bien complementan éstos hasta 180°. El lugar geométrico de puntos buscado es la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo dado.

II.100. Demostremos que $\frac{|AM|}{|AD|} = |\cos \angle BAC|$, donde D es el punto de intersección de AM con la circunferencia. Sea O el centro de la circunferencia; P, el punto medio de BC; K, el punto medio de AH. Los triángulos DOA y MKA son semejantes. Por consiguiente, $\frac{|MA|}{|AD|} = \frac{|AK|}{|DO|} = \frac{|OP|}{|OB|} = |\cos \angle BAC|$. El lugar geométrico de puntos buscado está formado por dos arcos que pertenecen a dos circunferencias diferentes.

II.101. Supongamos que B_0 y C_0 son los puntos medios de los lados AC y AB; BB_1 y CC_1 son las alturas, K es el punto medio de DE (fig. 26), GK y C_0N son perpendiculares a AB, B_0M es perpendicular a AC. Entonces, $\frac{|ML|}{|NM|} = \frac{|GC_1|}{|C_0C_1|} = \frac{|KP|}{|C_0C_1|} = \frac{|DC|}{|BC|}$ (la última igualdad se deduce de la semejanza de los triángulos DCE y ABC; K, P y C_0, C_1 son los puntos correspondientes en estos triángulos). Precisamente de la misma manera la mediatriz trazada hacia DF corta MN en el punto L_1 tal que $\frac{|NL_1|}{|NM|} = \frac{|BD|}{|BC|}$, es decir, los puntos L y L_1 coinciden.

El lugar geométrico de puntos buscado es la recta MN.

II.102. Es evidente que cualquier punto de cualquier altura del triángulo ABC pertenece al lugar geométrico de puntos buscado. Mostremos que no hay otros puntos. Tomemos el punto M que no se halla en las alturas del triángulo ABC. Supongamos que la recta BM corta

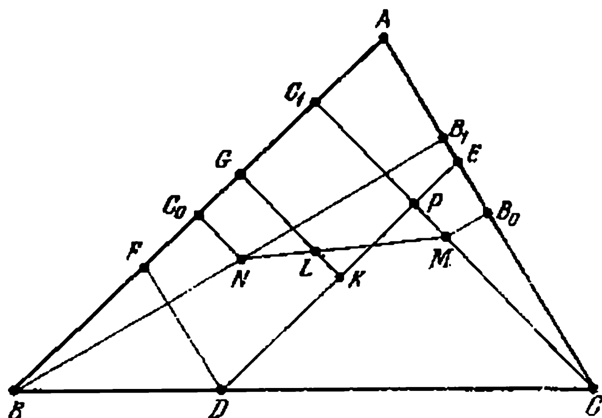


Fig. 26

las alturas bajadas desde los vértices A y C en los puntos M_1 y M_2, respectivamente. Si para los tres puntos M_1, M_2 y M se cumpliese la condición del problema, tendrían lugar las igualdades $\angle MAM_1 = \angle MCM_1$, $\angle MAM_2 = \angle MCM_2$ y los cinco puntos A, M, M_1, M_2 y el punto C_1 simétrico a C respecto a la recta BM, se hallarían en una circunferencia, lo que es imposible.

II.103. Notemos que, si por M pasa cualquier recta l que posee la propiedad necesaria, existe la recta l_1 que pasa por M y algún vértice del triángulo, o bien la recta l_2 que pasa

por M perpendicularmente a algún lado del triángulo, que posee esta misma propiedad. En efecto, supongamos que la recta l corta los lados AB y CB del triángulo ABC en los puntos C_0 y A_0 y el punto B_1, simétrico a B con respecto a l, se encuentra en el interior del $\triangle ABC$. Hagamos girar l alrededor de M de tal manera que B_1 se aproxime por el arco de la circunferencia correspondiente hacia AB o BC hasta que el punto C_0 o B_0 coincida con el vértice C o A (obtenemos la recta l_1), o B_1 quede sobre el lado correspondiente (obtendremos la recta l_2). Designemos con α el conjunto de los puntos de nuestro triángulo dispuestos en el interior del cuadrilátero limitado por las bisectrices, trazadas hacia los lados menor y mayor del triángulo, y las perpendiculares levantadas hacia los lados menor y mayor en sus puntos medios. (Si el triángulo dado es isósceles, entonces α es vacío. En todos los demás casos α es un cuadrilátero o un pentágono). El lugar geométrico de puntos buscado consta de todos los puntos del triángulo, excluyendo los puntos interiores de α.

II.105. Tenemos: $|MB|^2 = a^2 + c^2 \cos^2 A = a^2 + c^2 - c^2 \operatorname{sen}^2 A = a^2 + c^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 C = c^2 + a^2 \cos^2 C = |NB|^2$.

II.107. Demuéstrese que el punto simétrico al punto de intersección de las alturas del triángulo respecto al lado del triángulo, se halla en la circunferencia circunscrita.

II.109. Supongamos que H es el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC; AD es la altura, K, L, M, N son las proyecciones de D sobre AC, CH, HB y BA, respectiva-

mente. Aprovéchese que K y L se hallan en la circunferencia con diámetro CD; L y M, en la circunferencia con diámetro HD; M y N, en la circunferencia con diámetro DB.

II.111. Demuéstrese que el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo examinado es igual al radio de las circunferencias dadas y estas circunferencias son simétricas a la circunferencia circunscrita respecto a los lados del triángulo.

II.112. Supongamos que $ABCD$ es el rectángulo dado; K, L, M y N se hallan en las rectas AB, BC, CD y DA, respectivamente; P_1 es el segundo punto de intersección de la recta LN con la circunferencia circunscrita alrededor de $ABCD$ (el primer punto es P). Entonces, $BP_1 \parallel KN$, $P_1D \parallel LM$ y $\angle BP_1D = 90°$. Por lo tanto, $KN \perp LM$. Además, $LN \perp KM$; de esta manera, N es el punto de intersección de las alturas del $\triangle KLM$. Ahora, para concretar, supongamos que L y N se encuentran en los lados BC y DA. Designemos $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|KP| = x$, $|PN| = y$. La recta KN divide BD en la razón $\frac{(a+y)x}{(b-x)y}$, contando a partir del vértice B. En la misma razón también la recta LM dividirá BD.

II.113. Los segmentos $|AP|$, $|BQ|$ y $|CR|$ pueden expresarse por medio de los lados del triángulo, por ejemplo: $|AP| = \frac{bc}{b+c}$.

II.114. Sea M el punto medio de AD.

Compruébese que $|BF|^2 + |FM|^2 = |BM|^2$.

II.115. Trácese por D la recta perpendicular a la bisectriz del ángulo A, desígnese los puntos de su intersección con AB y AC por K y M y demuéstrese que $|AK| = |AM| = \frac{b+c}{2}$. Puesto que $|AC_1| = |AB_1| = p - a$, $|AC_2| = |BC_2| = p$ (p es el semiperímetro del $\triangle ABC$; a, b, c son sus lados), los puntos K y M serán los puntos medios de los segmentos C_1C_2 y B_1B_2.

II.116. Demuéstrese que l forma con AD los mismos ángulos que la recta BC tangente a nuestra circunferencia. De aquí se deduce que otra tangente a la circunferencia que pasa por D, será paralela a l.

II.117. Construyamos una circunferencia tangente a las rectas MN, AC y BC, de manera que los puntos de tangencia P y Q con las rectas AC y BC se hallen fuera de los segmentos CM y CN (esto será la circunferencia exinscrita en el triángulo MCN). Si R es el punto de tangencia de MN con la circunferencia, entonces $|MP| = |MR|$, $|NQ| = |NR|$, por consiguiente, $|MN| = |MP| + |NQ|$; pero, según el planteamiento, $|MN| = |MA| + |NB|$. De esta manera, uno de los puntos P o Q se encuentra en el lado correspondiente, mientras que el otro, en la prolongación. Además, $|CP| = |CQ| = \frac{1}{2}(|CP| + |CQ|) = \frac{1}{2}(|AC| + |CB|)$, es decir, la circunfe-

rencia construida es constante para todas las rectas.

II.118. Si O es el centro del círculo circunscrito alrededor del $\triangle ABC$, D es el punto medio de CB, H, el punto de intersección de las alturas, L, el punto medio de AH, entonces $|AL| = |OD|$ y, puesto que $AL \parallel OD$, resulta que OL divide AD por la mitad, es decir, L es simétrico a O respecto al punto medio de AD.

II.119. Sea BD la altura del triángulo; además, $|BD| = R\sqrt{2}$, donde R es el radio del círculo circunscrito, K y M son los pies de las perpendiculares bajadas desde D sobre AB y BC, O es el centro del círculo circunscrito. Si el ángulo C es agudo, entonces $\angle KBO = 90° - \angle C$. Puesto que el cuadrilátero $BMDK$ es inscrito, por consiguiente, $\angle MKD = \angle DBM = 90° - \angle C$. Por lo tanto, $\angle MKB = 180° - 90° - (90° - \angle C) = \angle C$; por consecuencia, $BO \perp KM$. Pero $S_{BKM} = \frac{1}{2} |BD|^2 \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C = R^2 \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C = \frac{1}{2} S_{ABC}$. (Usamos la fórmula $S = 2R^2 \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C$.) Si h_1 es la altura del $\triangle BKM$ trazada desde el vértice B, entonces $\frac{1}{2} S = \frac{1}{4} |AC| \times |BD| = S_{BKM} = \frac{1}{2} |KM| \, h_1 = \frac{1}{2} |BD| \, h_1 \text{ sen } B$, por lo tanto, $h_1 = \frac{|AC|}{2 \text{ sen } B} = R$; tomando en consideración

que $BO \perp KM$, obtenemos que el punto O se halla en KM.

II.120. Notemos que el $\triangle ADK$ es semejante al $\triangle ABK$, puesto que $|AK|^2 = |AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$. Si O es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABK$, entonces $\angle OAD + \angle ADK = 90° - \angle AKB + \angle ADK = 90°$ (se supuso que $\angle AKB$ es agudo; si $\angle AKB$ es obtuso, los razonamientos son análogos).

II.121. Demuéstrese que la recta paralela a BC, la cual pasa por E, divide la bisectriz del ángulo A en la misma razón, en la que divide a aquélla la bisectriz del ángulo C.

II.122. Si O es el vértice del ángulo, A es un punto tomado en la bisectriz, B_1 y B_2 son los puntos de intersección de los lados del ángulo con una circunferencia, C_1 y C_2 (B_1 y C_1 se hallan en un lado) son los puntos de intersección de otra circunferencia, entonces $\triangle AB_1C_1 = \triangle AB_2C_2$.

II.123. Aprovéchese que la cuerda común de dos circunferencias, que pasan por A, A_1 y B, B_1, también pasa por D (problema II.18).

II.125. Si O es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle AMB$, entonces $\angle MAB = 90° - \angle OMB = \angle BMC - 180°$. Precisamente tal será también $\angle MAC$.

II.126. No es difícil demostrar que las circunferencias examinadas se intersecan en un punto. Designémoslo con P. Si los puntos están dispuestos como lo muestra la fig. 27, $\angle PB_2M = 180° - \angle BB_2P = \angle PC_1B = 180° - \angle PC_1A = \angle PB_1A = \angle PA_2A = 180° - \angle PA_2M$, es decir, los puntos P,

B_2, M y A_2 se hallan en una circunferencia. De la misma manera demostraremos que en una circunferencia se encuentran los puntos P, B_2, M, C_2 y, por consiguiente, los cinco

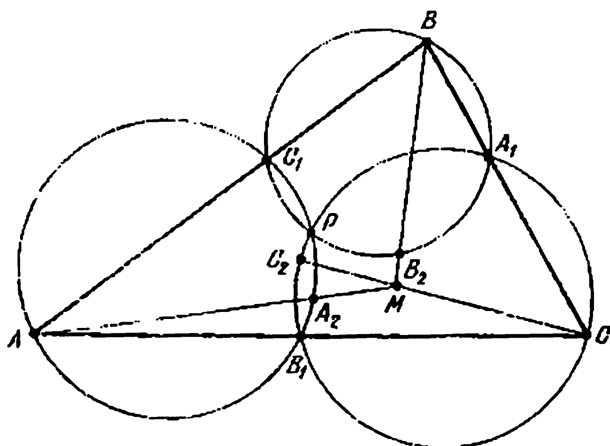


Fig. 27

puntos P, M, A_2, B_2, C_2 se hallan en una circunferencia.

II.127. Demuéstrese que los lados del triángulo $A_1B_1C_1$ son paralelos a los lados correspondientes del triángulo ABC.

II.128. Demuéstrese que al desplazar la recta KL, el centro de la circunferencia circunscrita alrededor de KLB_1 describe una línea recta.

II.129. Demuéstrese que el punto de intersección de cualesquiera dos segmentos los divide por la mitad.

II.130. Si KN es la perpendicular desde K sobre AB, $\angle CAB = \alpha$, entonces $\frac{|KN|}{|OM|} =$

$$= \frac{|AK|}{|AO|} = \frac{|AO| - |KO|}{|AO|} = \frac{|AO| - 2|OM| \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{|AO|} =$$

$$= \frac{|AO| - 2|AO| \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{|AO|} = \cos\alpha = \frac{|CD|}{|CB|}.$$

Puesto que $\triangle ACB$ y $\triangle ACD$ son semejantes, de lo antedicho se deduce que KN es igual al radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ACD$, y como K se halla en la bisectriz del ángulo A, resulta que K es el centro de la circunferencia inscrita en el $\triangle ACD$. La demostración para L es análoga.

II.131. Designemos por C_1 y A_1 los puntos medios de AB y BC, B' y A' son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con AC y BC. Para concretar, sea que $c \geqslant b$ (c y b son lados del $\triangle ABC$); entonces la bisectriz del ángulo A corta la prolongación de C_1A_1 en tal punto K que $|A_1K| = \frac{c-b}{2}$ y la recta $B'A'$ debe pasar por el mismo punto K puesto que los triángulos KA_1A' y $A'B'C$ son isósceles, $|A'C| = |B'C|$, $|A_1K| = |A_1A'|$, $\angle A'A_1K = \angle A'CB'$.

II.132. Examinemos el ángulo con el vértice A. En un lado del ángulo se toman tres puntos: B_1, B_2, B_3 y en el otro: C_1, C_2, C_3. Del teorema de Menelao (problema II.45, observación) se deduce que para que las rectas B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 se intersequen en un punto, es necesario y suficiente el cumplimiento de la igualdad

$$\frac{AB_2}{B_2B_1} \cdot \frac{C_1C_2}{C_2A} = \frac{AB_3}{B_3B_1} \cdot \frac{C_1C_3}{C_3A} \qquad (1)$$

(las razones se entienden en el sentido indicado en la observación). En efecto, si la igualdad (1) se cumple, del teorema de Menelao se deduce que las rectas B_2C_2 y B_3C_3 cortan el lado B_1C_1 del triángulo AB_1C_1 en un punto.

II.133. Tracemos por A una recta paralela a BC y designemos con K y L los puntos de su intersección con A_1C_1 y A_1B_1, respectivamente. Tenemos: $\frac{|KA|}{|BA_1|} = \frac{|AC_1|}{|C_1B|}$, $\frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|A_1C|}{|AL|}$ Y según el teorema de Ceva (problema II.44) $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1$, por lo tanto, $|KA| = |AL|$. Pero si AA_1 es la bisectriz del ángulo KA_1L, entonces, por cuanto $|KA| = |AL|$, AA_1 es perpendicular a KL, es decir, AA_1 es la altura del $\triangle ABC$.

II.134. Supongamos que K es el punto de intersección de AA_1 y BB_1, H es el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC. Los puntos A, K, H y B se hallan en una circunferencia (los ángulos AKB y AHB son iguales o bien en suma dan 180°, según cómo estén dispuestos los puntos K y H: por un lado de la recta AB o por ambos). El radio de esta circunferencia es igual a R que es el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$. Si φ es el ángulo comprendido entre AA_1 y AH, entonces $|KH| = 2R \operatorname{sen} \varphi$.

II.135. Sea H el punto de intersección de las alturas del triángulo $A_1B_1C_1$. Los puntos A_1, H, B_1 y C se hallan en una circunferencia; los puntos B_1, H, C_1 y A también se sitúan en

una circunferencia; además, los radios de estas circunferencias son iguales, los ángulos HB_1C y HB_1A son iguales o bien se completan uno a otro hasta 180°. Por consiguiente, $|HA| = |HC|$. La afirmación inversa no es cierta. Para cada punto A_1 tomado en la recta BC existen, como regla, dos triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_1B_1'C_1'$ (B_1 y B_1' se hallan en AC; C_1 y C_1', en AB), los puntos de intersección de cuyas alturas coinciden con el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$; además, uno de los triángulos es semejante al $\triangle ABC$ y el otro no. Así, por ejemplo, si ABC es un triángulo regular y A_1 es el punto medio de BC, como B_1 y C_1 pueden tomarse los puntos medios de AC y AB y como B_1' y C_1', los puntos en las prolongaciones de AC y AB más allá de C y B, $|CB_1'| = |CB|$, $|BC_1'| = |BC|$. La afirmación inversa será justa, si se requiere que los puntos A_1, B_1 y C_1 estén dispuestos en los lados del $\triangle ABC$ y no en sus prolongaciones.

11.136. Demostremos que el centro de la circunferencia buscada coincide con el ortocentro (punto de intersección de las alturas). Supongamos que BD es la altura, H es el punto de intersección de las alturas, K y L son los puntos medios de los segmentos construidos que parten del vértice B, $|BK| = |BL| = l$, M es el punto medio de BD. Entonces, $|KH|^2 = |LH|^2 = |MH|^2 + |KM|^2 = l^2 - |BM|^2 + |MH|^2 = l^2 - \frac{|BD|^2}{4} + \left(|BH| - \frac{|BD|}{2}\right)^2 = l^2 + |BH|^2 - |BH| \cdot |BD| = l^2 -$

$- | BH | \cdot | HD |$. Nos queda demostrar que los productos de los segmentos de las alturas, en los cuales se divide cada una de ellas por su punto de intersección, son iguales. Tracemos la altura AE. En vista de la semejanza del $\triangle BHE$ y el $\triangle AHD$ tenemos: $| BH | \cdot | HD | =$ $= | AH | \cdot | HE |$, lo que se requería.

II.137. Designemos (fig. 28): $| BC | = a$, $| CA | = b$, $| AB | = c$. Tracemos por el cen-

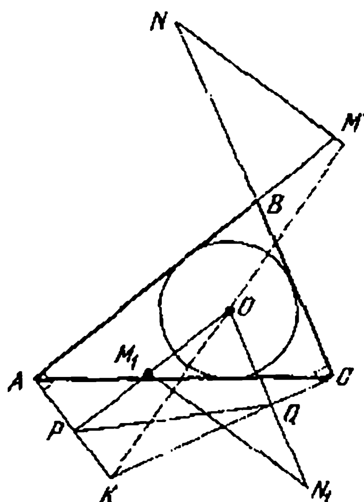


Fig. 28

tro de la circunferencia inscrita las rectas paralelas a AB y BC hasta que se intersequen con AK y KC en los puntos P y Q; en el triángulo OPQ tenemos: $\angle POQ = \angle ABC$, $| OQ | = p - c$, $| OP | = p - a$, donde p es el semiperímetro del $\triangle ABC$. Pero según el enunciado $\angle NBM = \angle ABC$, $| NB | = p -$ $- a$, $| MB | = p - c$. Por consiguiente,

$\triangle POQ = \triangle NBM$. Si en la recta OP se toma M_1 de forma que $|OM_1| = |OQ|$ y en OQ, el punto N_1 de modo que $|ON_1| = |OP|$, entonces $\triangle ON_1M_1 = \triangle NBM$ y los lados correspondientes BM y OM_1, BN y ON_1 resultarán, respectivamente, paralelos. Por lo tanto, $N_1M_1 \parallel NM$. Demostremos que $OK \perp N_1M_1$, puesto que en el cuadrilátero $OPKQ$ dos ángulos opuestos son rectos, entonces éste es inscrito; por consiguiente, $\angle OKP = \angle OQP$. Luego, $\angle KOP + \angle OM_1N_1 = \angle KOP + \angle OQP = \angle KOP + \angle OKP = 90°$ y esto significa que $OK \perp M_1N_1$.

II.138. Supongamos, para concretar, que P se halla en el arco AC. Los puntos A, M, P, N se encuentran en una circunferencia, por consiguiente, $\angle NMP = \angle NAP$. De manera análoga P, M, Q, C se sitúan en una circunferencia, $\angle PMQ = 180° - \angle PCQ = 180° - \angle PAN = 180° - \angle PMN$.

II.139. Sea ABC el triángulo dado (fig. 29); H, el punto de intersección de sus alturas. Notemos que los puntos simétricos a H respecto a sus lados se hallan en la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC (véase el problema II.107). Si H_1 es el punto simétrico a H respecto al lado BC, la recta l_1 simétrica a l respecto al mismo lado pasa por H_1. Al girar l alrededor de H en un ángulo φ, la recta l_1 girará alrededor de H_1 en el ángulo φ en el sentido opuesto. Por consiguiente, si P es el segundo punto de intersección de la recta l_1 con la circunferencia circunscrita, el radio OP (O es el centro de la circunferencia circunscrita) girará en el ángu-

lo 2φ alrededor de O en el sentido correspondiente. Los mismos razonamientos valen también para dos otras rectas simétricas a l. Pero si l coincide con alguna altura del triángulo, la afirmación del problema es evidente

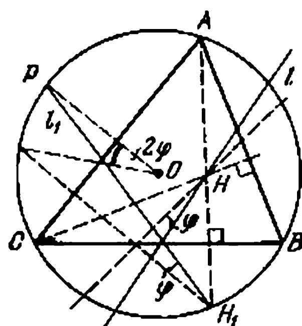


Fig. 29

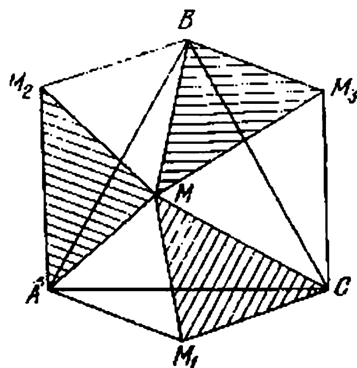


Fig. 30

(el punto P coincide con el vértice correspondiente del triángulo). Por consiguiente esta afirmación siempre es válida.

II.140. Supongamos que los puntos A, B, C y M tienen en el sistema cartesiano de coordenadas las coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x, y), respectivamente; las coordenadas del punto G son $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. Entonces, la validez de la afirmación que se demuestra, se deduce de la igualdad $3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+(x-x_3)^2-\frac{1}{3}((x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2)$ y de la relación análoga para las ordenadas.

II.141. Examinemos el caso, cuando el punto M (fig. 30) se halla en el interior del triángulo ABC. Hagamos girar el triángulo ABM alrededor de A en el ángulo de 60° de manera que B pase a C. Obtenemos el triángulo AM_1C igual al $\triangle ABM$; el $\triangle AMM_1$ es regular, por consiguiente, los lados del $\triangle CMM_1$ son iguales a los segmentos MA, MB, MC. De manera análoga obtenemos los puntos M_2 y M_3. El área del hexágono $AM_1CM_3BM_2$ es igual al área duplicada del $\triangle ABC$, es decir, es igual a $a^2\sqrt{3}/2$. Por otra parte, el área de este hexágono se forma sumando tres triángulos regulares: AMM_1, CMM_3, BMM_2 y tres triángulos iguales al buscado. Por eso, $3S + (|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2)\frac{\sqrt{3}}{4} = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$. Aprovechando el resultado del problema II.140, obtenemos: $3S + (3d^2 + a^2)\frac{\sqrt{3}}{4} = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, de donde $S = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 - 3d^2)$. De manera análoga se examinan los demás casos de disposición del punto M.

II.142. Hágase uso de los resultados de los problemas II.141 y II.6. El lugar geométrico buscado, como regla, consta de una recta y una circunferencia.

II.143. Sea O (fig. 31,a) el centro de la circunferencia circunscrita e I, el incentro de la inscrita. Bajemos desde O e I las perpendiculares sobre AB y BC: ON, OP, IL, IQ. Si a, b, c son las longitudes de los lados BC, CA y

AB, respectivamente, y p es el semiperímetro del $\triangle ABC$, entonces $|BK| = |c - b|$, $|BM| = |a - b|$, $|BN| = c/2$, $|BP| = a/2$, $|BL| = |BQ| = p - b$, $|NL| = \frac{1}{2}|a - b|$, $|PQ| = \frac{1}{2}|c - b|$ (véase el problema I.18). Por consiguiente, si por O

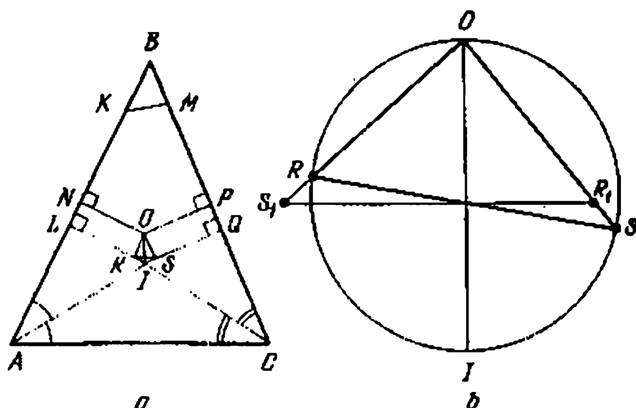


Fig. 31

se trazan las rectas paralelas a los lados AB y BC hasta que se intersequen con las perpendiculares bajadas desde I, se obtendrá el $\triangle ORS$ semejante al $\triangle BKM$ con la razón de semejanza 1/2. Pero la circunferencia construida sobre OI como sobre diámetro, es circunscrita para el $\triangle ORS$. Por lo tanto, el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle BKM$ es igual a OI. Para demostrar la segunda parte del problema notemos que, si en la recta OS se traza el segmento OR_1 igual a OR y en OR se traza el segmento OS_1 igual a OS, la recta S_1R_1 será paralela a KM (fig.

31,*b*); pero $\angle OR_1S_1 + \angle IOR_1 = \angle ORS + \angle IOS = 90°$, es decir, $S_1R_1 \perp OI$.

II.144. En las designaciones del problema anterior tracemos por A una recta perpendicular a OI, designando con D su punto de intersección con la recta BC. Demuéstrese que la diferencia entre los radios de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos ABD y ACD, es igual al radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo BKM.

II.145. Sea que los lados del triángulo son iguales a a, b y c; además, $b = (a + c)/2$.

a) De la igualdad $pr = \frac{1}{2} bh_b$ (p es el semiperímetro, r, el radio del círculo inscrito, h_b, la altura bajada sobre el lado b) obtenemos: $\frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2} bh_b$; pero $a + c = 2b$, de manera que $h_b = 3r$.

b) Esta afirmación se deduce de que $r = \frac{1}{3}h_b$ y el punto de intersección de las medianas divide cada mediana en la razón de 2 : 1.

c) Prolonguemos la bisectriz BD hasta la intersección con la circunferencia circunscrita en el punto M. Si se demuestra que O es el centro de la circunferencia inscrita, el cual divide BM por la mitad, con esto quedará demostrada también nuestra afirmación. (Tracemos el diámetro BN; entonces la recta que une los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita, será paralela a NM y $\angle BMN = 90°$). Pero el $\triangle COM$ es isósceles,

puesto que $\angle COM = \angle OCM = \frac{1}{2}(\angle C + \angle B)$. Por lo tanto, $|CM| = |OM|$. Del planteamiento $b = (a + c)/2$ según la propiedad de la bisectriz obtenemos que $|CD| = a/2$. Sea K el punto medio de CB; $\triangle CKO = \triangle CDO$ ($|CK| = |CD|$, $\angle KCO = \angle OCD$); de aquí se deduce: $\angle BKO = \angle CDM$; además, $\angle DCM = \angle OBK = \angle B/2$, $|CD| = |BK|$, es decir, $\triangle BKO = \triangle CDM$, $|CM| = |BO|$, por consiguiente, $|BO| = |OM|$, lo que había que demostrar.

d) Tomemos cualquier punto en la bisectriz. Sean las distancias hasta los lados BC y BA iguales a x y hasta el lado AC, a y. Tenemos: $\frac{1}{2}(ax + cx + by) = S_\Delta \Rightarrow b(2x + y) = 2S_\Delta \Rightarrow 2x + y = h_b$.

e) Si L es el punto medio de BA, el cuadrilátero que necesitamos es homotético al cuadrilátero $BCMA$ con la razón 1/2 (véase el punto c)).

II.146. Sea N el punto de intersección de la tangente común con BC. Para nosotros es suficiente comprobar que $|FN|\cdot|NG| = |KN|\cdot|NM| = |DN|\cdot|NE|$. Todos los segmentos se calculan fácilmente, puesto que $|BD| = |CE| = p - b$, $|DE| = |b - c|$, $\frac{|DN|}{|NE|} = \frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$ (r_a es el radio de la circunferencia tangente al lado BC y a las prolongaciones de los lados AB y AC), etc.

II.147. Tracemos por los vértices del triángulo ABC las rectas paralelas a los lados

opuestos. Estas forman el $\triangle A_1B_1C_1$ semejante al $\triangle ABC$; aquél se obtiene a partir del $\triangle ABC$ con ayuda de la homotecia, cuyo centro se halla en el centro de masas común para el $\triangle ABC$ y el $\triangle A_1B_1C_1$ y cuya razón es igual a —2. El punto de intersección de las alturas para el $\triangle ABC$ es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle A_1B_1C_1$. Por consiguiente, los puntos O (centro de la circunferencia circunscrita), G (centro de masas) y H (punto de intersección de las alturas del $\triangle ABC$) se hallan en una recta; además, $|OG| = \frac{1}{2}|GH|$, G se sitúa en el segmento OH.

II.148. En el triángulo acutángulo la recta de Euler corta los lados mayor y menor. En el obtusángulo, el mayor y el medio.

II.150. Demuéstrese que la propiedad requerida la tiene tal punto P en la recta de Euler, para el cual $|PO| = |OH|$ (O es el centro del círculo circunscrito, H es el punto de intersección de las alturas); además, para cada triángulo la distancia desde el centro de masas hasta el vértice opuesto del triángulo inicial es igual a $\frac{4}{3}R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$ y la recta que pasa por el centro de masas de este triángulo y el vértice opuesto del de partida, pasa por O.

II.151. Sea C_1 el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle APB$ y C_2, el punto simétrico a C_1 respecto a AB. Para los triángulos BPC y CPA determinamos

los puntos A_1 y A_2, B_1 y B_2. Puesto que los triángulos AC_1B, AC_2B, BA_1C, BA_2C, CB_1A, CB_2A son isósceles con ángulos en los vértices iguales a 120°, los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son regulares (véase el problema II.296). Al calcular los ángulos de los cuadriláteros con los vértices P, A_2, B_2, C_2, se puede demostrar que estos puntos (P, A_2, B_2, C_2) se hallan en una circunferencia. Luego, si H es el punto de intersección de las alturas del triángulo APB, entonces, puesto que $|PH| = |C_1C_2|$ y, por consiguiente, PHC_2C_1 es un paralelogramo, la recta C_1H (recta de Euler del triángulo APB) pasa por el punto medio de PC_2. Pero PC_2 es una cuerda de la circunferencia con el centro C_1, consiguientemente, C_1H es perpendicular a PC_2. De tal manera, las tres nuestras rectas de Euler coinciden con las mediatrices de los segmentos PC_2, PB_2 y PA_2 y puesto que los puntos P, A_2, B_2, C_2 se hallan en una circunferencia, estas rectas se cortan en su centro, o sea, en el centro del triángulo regular $A_2B_2C_2$. Del resultado del problema II.296 se deduce que estas tres rectas de Euler concurren en el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC.

II.152. Sea que ABC es el triángulo dado, cuyos lados son a, b, y c; además, $a \geqslant b \geqslant c$; A_1, B_1, C_1 son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita; I es el centro de la circunferencia inscrita y O, el centro de la circunscrita. Puesto que I respecto al $\triangle A_1B_1C_1$ es el centro de la circunferencia circunscrita, es suficiente demostrar que la recta IO pasa por el punto de intersección de las alturas del

$\triangle A_1B_1C_1$. En los rayos AC y BC tracemos los segmentos AK y BL, $|AK| = |BL| = c$, y en los rayos AB y CB, los segmentos AM y CN, $|AM| = |CN| = b$. Como se sabe (véase el problema II.143), la recta IO es perpendicular a LK y MN, por consiguiente, $LK \parallel MN$. Designemos: $\angle KLC = \angle BNM = \varphi$. Según el teorema de los senos para los triángulos KLC y BNM

$$\frac{|LC|}{|KC|} = \frac{a-c}{b-c} = \frac{\operatorname{sen}(\varphi + C)}{\operatorname{sen}\varphi}, \tag{1}$$

$$\frac{|BN|}{|MB|} = \frac{a-b}{b-c} = \frac{\operatorname{sen}(B-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}. \tag{2}$$

Ahora tracemos en el triángulo $A_1B_1C_1$ la altura hacia el lado B_1C_1. Sea Q el punto de su intersección con la recta IO. Hay que demostrar que Q es el punto de intersección de las alturas del $\triangle A_1B_1C_1$. Pero la distancia desde I hasta B_1C_1 es $|IA_1|\cos A_1 = r \operatorname{sen}\frac{A}{2}$. Por lo tanto debe cumplirse la igualdad $|A_1Q| = 2r \operatorname{sen}\frac{A}{2}$. Los ángulos del $\triangle QIA_1$ pueden expresarse a través de los ángulos del $\triangle ABC$ y φ, a saber: $\triangle QIA_1 = 180^\circ - \varphi$, $\triangle QA_1I = \frac{\angle B - \angle C}{2}$. Se requiere demostrar que $2\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{B-C}{2}\right)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \operatorname{sen}(\varphi + C) - \operatorname{sen}(B - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi$. La última igualdad se deduce de (1) y (2).

II.153. Al demostrar se aprovecha el hecho de que, si desde cualquier punto P se bajan las perpendiculares PK y PL sobre las rectas que se cortan en el punto M, entonces P, K, L y M se hallarán en una circunferencia*).

II.154. Aplíquese el resultado del problema I.246.

II.156. La distancia entre las proyecciones de M sobre AC y BC es igual a $|CM|$ sen C. Si K y L son las proyecciones de M sobre AB y BC, la proyección de AB sobre la recta KL (ésta es precisamente la recta de Simson) es igual a $|AB|\,|\cos\angle BKL| = |AB| \times$ $\times\,|\cos\angle BML| = |AB|$ sen $\angle CBM =$ $= |CM|$ sen C.

II.157. Demuéstrese que los lados de los triángulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ y $A_3B_3C_3$ son correspondientemente paralelos.

II.158. Demuéstrese que la recta de Simson que corresponde a A_1, es perpendicular a B_1C_1 (lo mismo es cierto para otros puntos). Luego se puede demostrar que la recta de Simson que corresponde al punto A_1, pasa por el punto medio de A_1H, donde H es el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC (véase también la resolución del problema II.166). Por consiguiente, las rectas de Sim-

*) Más detalles acerca de la familia de rectas de Simson se puede leer en el libro: *Vasíliev N., Gutenmájer V.* Rectas y curvas. Editorial Mir, Moscú, 1980.

son son alturas del triángulo, cuyos vértices son los puntos medios de los segmentos A_1H, B_1H, C_1H. *Observación*. Se puede demostrar que para los puntos arbitrarios A_1, B_1, C_1 las rectas de Simson de estos puntos respecto al triángulo ABC forman un triángulo semejante al triángulo $A_1B_1C_1$; además, el centro de la circunferencia circunscrita alrededor de éste coincide con el punto medio del segmento que une los puntos de intersección de las alturas de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$.

II.159. En primer lugar se ha de comprobar la validez de la afirmación siguiente: si las perpendiculares levantadas hacia los lados (o las prolongaciones de los lados) del triángulo en los puntos de intersección con cierta recta concurren en un punto M, entonces M se halla en la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo. (Esta afirmación es inversa respecto a la afirmación del problema II.153). Examinemos la parábola $y = ax^2$. Una tangente arbitraria a ésta tiene la forma: $y = kx - \frac{k^2}{4a}$ (la tangente tiene un solo punto común con la parábola, por lo tanto, el discriminante de la ecuación $ax^2 = kx + b$ es igual a cero). Esta tangente corta el eje x en el punto $x = \frac{k}{4a}$. En este punto como perpendicular a la tangente servirá la recta $y = -\frac{1}{k} \times \left(x - \frac{k}{4a}\right) = -\frac{x}{k} + \frac{1}{4a}$. Por consiguiente, todas las perpendiculares de esta índole pasan por el punto $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ (foco de la parábola). Aho-

ra valgámonos de la observación hecha al comienzo de la resolución.

II.160. Supongamos que ABC es el triángulo dado; H es el punto de intersección de sus alturas; A_1, B_1, C_1 son los puntos medios de los segmentos AH, BH, CH; AA_2 es la altura y A_3, el punto medio de BC. Para mayor comodidad consideremos que ABC es un triángulo acutángulo. Puesto que $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$ y el $\triangle B_1A_2C_1 = \triangle B_1HC_1$, entonces $\angle B_1A_2C_1 = \angle B_1HC_1 = 180° - \angle B_1A_1C_1$, es decir, los puntos A_1, B_1, A_2, C_1 se hallan en una circunferencia. También es fácil ver que $\angle B_1A_3C_1 = \angle B_1HC_1 = 180° - \angle B_1A_1C_1$, es decir, los puntos A_1, B_1, A_3, C_1 también se encuentran en una (y, por ende, en la misma) circunferencia. De aquí se deduce que los 9 puntos, de los cuales se trata en el planteamiento, se hallan en una circunferencia. El caso del triángulo obtusángulo ABC se examina de manera análoga. Notemos que la circunferencia de los nueve puntos es homotética a la circunferencia circunscrita con el centro de homotecia en H y la razón 1/2. (Precisamente de esta manera están dispuestos los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$). Por otra parte, la circunferencia de los nueve puntos es homotética a la circunferencia circunscrita con el centro de homotecia en el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC y la razón —1/2. (Precisamente así están dispuestos los triángulos ABC y el triángulo con vértices en los puntos medios de sus lados).

II.161. Nuestra afirmación se deduce de que D se sitúa en la circunferencia de los nueve

puntos, pero esta circunferencia es homotética a la circunferencia circunscrita con el centro de homotecia en H y la razón $1/2$ (véase el problema II.160).

II.162. Nuestra afirmación se deduce de que E está en la circunferencia de los nueve puntos pero esta circunferencia es homotética a la circunscrita con el centro de homotecia en M y la razón $-1/2$ (véase el problema II.160).

II.163. Esta distancia es la semisuma de las distancias entre BC, por una parte, el punto de intersección de las alturas H y el centro del círculo circunscrito, por otra, y esta última distancia es igual a la mitad de $|HA|$.

II.164. Supongamos que M_0 es el punto medio de HP, A_0 es el punto medio de HA; A_0, A_1 y M_0 se hallan en la circunferencia de los nueve puntos. Por consiguiente, M también se encuentra en esta circunferencia, puesto que del planteamiento del problema se deduce la igualdad $|M_0H|\cdot|HM| = |A_0H|\cdot|HA_1|$ y H se encuentra, al mismo tiempo, en el interior o fuera de cada uno de los segmentos M_0M y A_0A_1.

II.165. Demostremos que M y N se encuentran en las líneas medias correspondientes del triángulo ABC. Si P es el punto medio de AB, entonces $\angle MPA = 2\angle ABM = \angle ABC = \angle APL$. Para concretar, sea que ABC es un triángulo acutángulo, $\angle C \geqslant \angle A$; en este caso $\angle MNK = 180^\circ - \angle KNB = \angle KCB = \angle MLK$ (nos hemos valido de que los puntos K, N, B y C se encuentran en una circunferencia, así como de que ML es paralela a BC). Por lo tanto, M, L, N y K se hallan en una

circunferencia. Luego, $\angle LMK = \angle PMB + \angle NMK = \frac{1}{2}\angle B + \angle BMK = \frac{1}{2}\angle B + \angle A$. Si O es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle LMK$, entonces $\angle LOK = 2\angle LMK = \angle B + 2\angle A = 180° - \angle C + \angle A = 180° - \angle LPK$ ($\angle LPK = \angle APK + \angle APL = 180° - 2\angle A - \angle B = \angle C - \angle A$), es decir, O se sitúa en la circunferencia que pasa por L, P y K, pero ésta es precisamente la circunferencia de los nueve puntos.

II.166. Puesto que el punto medio de FH se halla en la circunferencia de los nueve puntos (véase el problema II.160), entonces es suficiente mostrar que también la recta de Simson que corresponde al punto F, divide FH por la mitad. Supongamos que K es la proyección de F sobre cualquier lado del triángulo, D es el pie de la altura trazada hacia el mismo lado, H_1 es el punto de intersección de esta altura con la circunferencia circunscrita, $|H_1D| = |HD|$ (véase el problema II.107, solución), L es el punto de intersección de la recta de Simson con la misma altura y, por fin, M es un punto tomado en la recta HH_1, para el cual $FM \parallel KD$; entonces $\triangle FMH_1 = \triangle KDL$ ($|FM| = |KD|$); ambos triángulos son rectangulares y $\angle DLK = \angle MH_1F$, puesto que la altura del triángulo es la recta de Simson que corresponde al vértice, desde el cual ésta parte, y se puede valerse de la afirmación del problema II.154. También es fácil mostrar que las direcciones $\overrightarrow{H_1M}$ y $\overrightarrow{DL}$ coinciden, es

decir, $FKHL$ es un paralelogramo, de lo cual se deduce nuestra afirmación.

II.167. En la fig. 32 O es el centro de la circunferencia circunscrita, A_1, B_1, C_1 son los puntos medios de los lados; L y K, las proyecciones de A y B sobre l; M, el punto de intersección de las rectas que pasan por L y K perpendicularmente a BC y CA. Para concretar, el

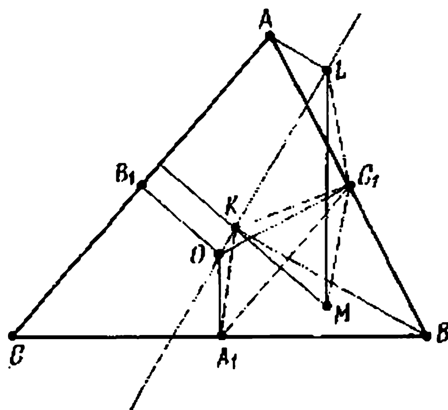


Fig. 32

triángulo ABC es acutángulo. Primero demostremos que C_1 es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle KLM$. Los puntos A_1, O, K, C_1, B se hallan en una circunferencia. Por consiguiente, $\angle C_1KL = \angle OA_1C_1 = 90° - \angle C$; de la misma manera $\angle C_1LK = 90° - \angle C$. Por lo tanto, $|KC_1| = |C_1L|$, $\angle LC_1K = 2\angle C$ y, puesto que $\angle KLM = \angle C$, nuestra afirmación está demostrada. Además, KM es perpendicular a A_1C_1, $|KC_1| = |C_1M|$, por consecuencia, $\angle C_1MA_1 = \angle C_1KA_1 = 180° - \angle B$, es de-

cir, M se encuentra en la circunferencia circunscrita alrededor del $A_1B_1C_1$.

II.168. Designemos con H el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC y con A_2, B_2, C_2, los puntos medios de los segmentos AH, BH, CH. Notemos que los triángulos AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C son semejantes entre sí (los vértices correspondientes están designados con letras iguales), además A_2, B_2 y C_2, respectivamente, son centros de las circunferencias circunscritas alrededor de éstos. Primero demostremos la afirmación siguiente: tres rectas que pasan por los puntos A_2, B_2 y C_2 y dispuestas igualmente respecto a los triángulos AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C concurren en un punto en la circunferencia de los nueve puntos. Notemos que las rectas A_2B_1, B_2B y C_2B_1 están dispuestas igualmente respecto a los triángulos AB_1C_1, A_1BC_1 y A_1B_1C y se intersecan en el punto B_1 que se halla en la circunferencia de los nueve puntos. Puesto que los puntos A_2, B_2, C_2 se sitúan en la circunferencia de los nueve puntos, es evidente que también las tres rectas que se obtienen a partir de las rectas A_2B_1, B_2B y C_2B_1 haciendo girar en un mismo ángulo alrededor de los puntos A_2, B_2 y C_2, respectivamente, también concurrirán en un punto dispuesto en la circunferencia de los nueve puntos. Sea P el punto de intersección de las rectas de Euler de los triángulos AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C. Designemos: $\angle PA_2A = \varphi$. Para el uso cómodo consideremos que el triángulo ABC es acutángulo y el punto P se halla en el arco B_1A_2 de la circunferencia de los nueve puntos (fig. 33). Entonces,

$\angle PA_2A_1 = 180^\circ - \varphi$, $\angle PA_2B_1 = 180^\circ - \varphi - \angle B_1A_2A_1 = 180^\circ - \varphi - \angle B_1C_1A_1 = 2\angle C - \varphi$, $\angle PA_2C_1 = 180^\circ - \varphi + 180^\circ - 2\angle B = 360^\circ - \varphi - 2\angle B$. Puesto que las cuerdas PA_1, PB_1 y PC_1 son proporcionales a los senos de los

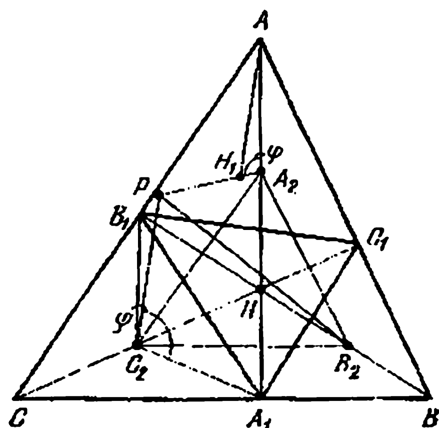


Fig. 33

ángulos apoyados en éstas, nos queda demostrar que de las tres magnitudes sen φ, sen $(2C - \varphi)$, $-$sen $(2B + \varphi)$ una (en nuestro caso la primera) es igual a la suma de las dos otras, es decir, sen $\varphi =$ sen $(2C - \varphi) -$ sen $(2B + \varphi)$. Pero en el triángulo AA_2H_1 / / $|AA_2| = R$, $|AH_1| = 2R \cos A$ (R es el radio de la circunferencia circunscrita; $R \cos A$ es la distancia desde el centro del círculo circunscrito A_2 hasta B_1C_1), $\angle H_1AA_2 = \angle A + 2\angle B - 180^\circ$. Según el teorema de los senos para el $\triangle AA_2H_1$: $\frac{2\cos A}{\text{sen } \varphi} = \frac{1}{\text{sen}(2B+A+\varphi)} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\text{sen}\,(2B + 2A + \varphi) - \text{sen}\,(2B + \varphi) = \text{sen}\,\varphi \Rightarrow \text{sen}\,(2C - \varphi) - \text{sen}\,(2B + \varphi) = \text{sen}\,\varphi$, lo que había que demostrar. De esta manera queda demostrada la afirmación para el caso del triángulo acutángulo. El caso del triángulo obtusángulo ABC se examina de la misma manera.

II.169. En el triángulo dado ABC, A_1, B_1, C_1 son los puntos medios de los lados correspondientes. Demuéstrese que la circunferencia que pasa, por ejemplo, por el vértice A y satisface la condición del problema, pasa por los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos interior y exterior A con la línea media B_1C_1. Por lo tanto, para todos los puntos M de esta circunferencia se cumplirá la igualdad $|B_1M| : |C_1M| = |B_1A| : |C_1A| = b : a$ (véase el problema II.9). De esta manera, si M_1 y M_2 son los puntos de intersección de dos circunferencias de esta índole, entonces $|A_1M_1| : |B_1M_1| : |C_1M_1| = a : b : c$ (lo mismo se refiere al punto M_2), por eso M_1 y M_2 pertenecerán a una tercera circunferencia. Además, M_1 y M_2 pertenecen a una recta, para todos los puntos M de la cual se cumple la igualdad $(c^2 - b^2)\,|A_1M|^2 + (a^2 - c^2) \times |B_1M|^2 + (b^2 - a^2)\,|C_1M|^2 = 0$ (véase el problema II.14 y su solución). Esta recta pasa por el centro del círculo circunscrito alrededor del $\triangle A_1B_1C_1$ y por el punto de intersección de sus medianas (compruébese esto expresando las longitudes de medianas mediante los lados), es decir, aquélla coincide con la recta de Euler del $\triangle A_1B_1C_1$ y, por lo tanto, también del $\triangle ABC$.

II.170. a) De manera análoga a como esto se ha hecho en el problema anterior, se puede demostrar que estas tres circunferencias se intersecan en dos puntos M_1 y M_2; además, $|AM_1| : |BM_1| : |CM_1| = bc : ac : ab$ (lo mismo se hace para M_2).

b) Se deduce de a) y del problema II.14.

c) Demuéstrese que si M se halla en el interior del $\triangle ABC$, entonces $\angle AM_1C = 60° + \angle B$, $\angle BM_1A = 60° + \angle C$, $\angle CM_1B = 60° + \angle B$ (para esto se puede aprovechar el teorema de Bretschneider, problema II.236).

II.171. Tomemos en BC el punto A_1 y en BA el punto C_1 de manera que $|BA_1| = |BA|$, $|BC_1| = |BC|$ ($\triangle A_1BC_1$ es simétrico al $\triangle ABC$ respecto a la bisectriz del ángulo B). Es evidente que BK divide A_1C_1 por la mitad. Construyamos dos paralelogramos BA_1MC_1 y $BCND$ (los lados correspondientes de los paralelogramos son paralelos, los puntos B, K, M y N se hallan en una recta); $|CN| = |AA_1| \dfrac{|BC|}{|BA_1|} = \dfrac{|BC|^2}{|BA|}$, por consiguiente, $\dfrac{|AK|}{|KC|} = \dfrac{|AB|}{|CN|} = \dfrac{|AB|^2}{|BC|^2}$.

II.172. Tenemos (fig. 34) $\angle FE_1A = \angle EDF = \angle A$; por lo tanto, $|AF| = |E_1F|$, $\angle FE_1N = \angle FDB = \angle C$, $\angle E_1FN = \angle A$. Por consiguiente, el $\triangle E_1FN$ es semejante al $\triangle ABC$, $\dfrac{|AF|}{|FN|} = \dfrac{|E_1F|}{|FN|} = \dfrac{|AC|}{|AB|}$, $\angle AFN = 180° - \angle A$. Ahora se puede mostrar que AN es la simediana. Para esto examinemos el paralelogramo ACA_1B;

AA_1 divide BC por la mitad, el $\triangle ACA_1$ es semejante al $\triangle AFN$, por lo tanto, $\angle NAF = \angle A_1AC$.

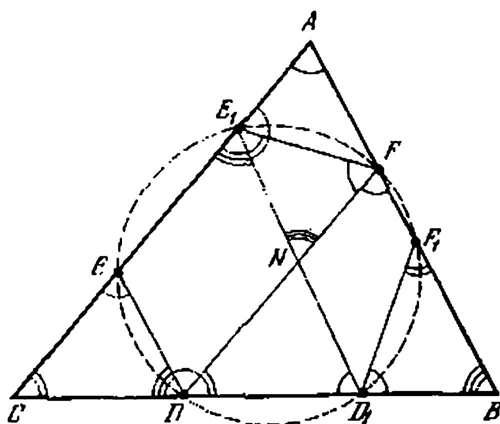


Fig. 34

II.173. La circunferencia de Apolonio que pasa por el vértice B del triángulo ABC, es el lugar geométrico de puntos M, para los cuales $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$ (problema II.170, solución). Por consiguiente, si D es el punto de intersección de esta circunferencia de Apolonio y de la circunferencia circunscrita alrededor de ABC, la recta BD divide AC en la razón $\frac{S_{BAD}}{S_{BCD}} = \frac{|AB|\cdot|AD|}{|CB|\cdot|CD|} = \frac{|AB|^2}{|CB|^2}$.

II.174. Sea N el punto de intersección de BQ y CD; O, el centro de la circunferencia; R, su radio. Notemos que $\angle NBC = \frac{1}{2} \angle PMQ$. (Si Q está en el segmento NB,

entonces $\angle NBC = 90° - \angle QBP = 90° - \frac{1}{2}\angle QOP = \frac{1}{2}\angle PMQ.$) Por consiguiente, los triángulos NBC y POM son semejantes, $|CN| = |BC| \frac{R}{|PM|} = R \frac{|PD|}{|PM|} = R \frac{|BP|}{|AB|} = \frac{1}{2}|BP| = \frac{1}{2}|CD|$.

II.175. Sea H el punto de intersección de las alturas; O, el centro del círculo circunscrito; B_1, el punto medio de CA. La recta MN pasa por el punto medio de BH, el punto K; $|BK| = |B_1O|$. Demuéstrese que la recta MN es paralela a OB (si $\angle C > \angle A$, entonces $\angle MKN = 2\angle MBN = \angle C - \angle A = \angle OBH$).

II.176. Supongamos que la recta AM corta por segunda vez la circunferencia que pasa por B, C y M en el punto D. Entonces, $\angle MDB = \angle MBA = \angle MAC$, $\angle MDC = \angle MBC = \angle MAB$. Por consiguiente, $ABDC$ es un paralelogramo.

II.177. De la resolución del problema II.234 se deduce que $\frac{|LM|}{|MK|} = \frac{|LN|}{|NK|}$. Se puede considerar que l pasa por N. Apliquemos al $\triangle NKP$ el teorema de los senos. Sustituyamos la razón de los senos por la razón de las cuerdas correspondientes. Tendremos: $|NP| = \frac{|NK| \operatorname{sen} \angle NKP}{\operatorname{sen} \angle KPN} = \frac{|NK| \operatorname{sen} \angle NKM}{\operatorname{sen} \angle KMA} = \frac{|NK|}{|KM|}|NM|$, etc.

II.178. Supongamos que O es el centro de la circunferencia inscrita, K y L son los puntos

de tangencia con los lados AC y AB; la recta que pasa por N paralelamente a BC, corta los lados AB y AC en los puntos R y M. El cuadrilátero $OKMN$ es inscrito ($\angle ONM = \angle OKM = 90°$); por consiguiente, $\angle OMN = \angle OKN$, de manera análoga $\angle ORN = \angle OLN$, pero $\angle OLN = \angle OKN$, por lo tanto, $\angle ORN = \angle OMN$ y el $\triangle ORM$ es isósceles, ON es la altura; de esta manera, $|RN| = |NM|$.

II.179. Si $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, entonces, como se conoce (véase el problema I.18), $|MC| = \frac{a+b-c}{2}$. Tracemos por K una recta paralela a AC; designemos sus puntos de intersección con AB y BC por A_1 y C_1, respectivamente. La circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$ es exinscrita (es tangente a A_1C_1 y las prolongaciones BA_1 y BC_1) para el $\triangle A_1BC_1$. Pero el $\triangle A_1BC_1$ es semejante al $\triangle ABC$. Por consiguiente, la circunferencia exinscrita en ABC será tangente a AC en el punto N; designemos los puntos de su tangencia con las prolongaciones de BA y BC por R y L, respectivamente. Tenemos: $|BR| = |BL| = \frac{1}{2}(a+b+c)$, por lo tanto, $|AN| = |AR| = |RB| - |BA| = \frac{a+b-c}{2} = |MC|$.

II.180. Tracemos por K la recta paralela a BC. Designemos por L y Q los puntos de intersección de la tangente en el punto P con la recta BC y la recta construida, paralela a ella, y por N, el punto de intersección de AK con

BC. Puesto que $|CN| = |BM|$ (véase el problema II.179), es suficiente demostrar que $|NL| = |LM|$; pero $|PL| = |LM|$, por consiguiente, hace falta demostrar que $|PL| = |NL|$. Puesto que el $\triangle$ PLN es semejante al $\triangle PQK$, en el cual $|PQ| =$ $= |QK|$, entonces $|PL| = |NL|$ y $|CL| = |LB|$.

II.181. Sean M y N los puntos de intersección de la recta LK con las rectas l y CD. Entonces $|AM|^2 = |ML|\cdot|MK|$. De la semejanza de los triángulos KMB y DKN se deduce que $|MK| = \frac{|KN|\cdot|MB|}{|DN|}$. De la semejanza de los triángulos CNL y MLB se deduce: $|ML| = \frac{|LN|\cdot|MB|}{|CN|}$.

Conque, $|MK|\cdot|ML| = \frac{|KN|\cdot|LN|}{|CN|\cdot|DN|}|MB|^2 =$ $= |MB|^2$, es decir, $|MA|^2 = |MB|^2$, $|MA| =$ $= |MB|$.

II.182. Supongamos (fig. 35) que B es el segundo punto común de las circunferencias; C es un punto de la recta AB, desde el cual están trazadas las tangentes, y, por fin, K es el punto de intersección de las rectas MN y PQ. Valiéndonos del teorema de los senos y del resultado del problema I.234, obtenemos:

$$\frac{|PM|}{|MA|} = \frac{|PM|}{\operatorname{sen}\angle PBM}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle PBM}{|MA|} = \frac{BM}{\operatorname{sen}\angle BPM}\times$$
$$\times\frac{\operatorname{sen}\angle PBM}{|MA|} = \sqrt{\frac{|CB|}{|CA|}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle PBM}{\operatorname{sen}\angle BPM}.$$ De este modo, al designar con α el ángulo AMB y con β el ángulo APB (α y β son constantes), obten-

dremos: $\frac{|PM|}{|MA|}=\sqrt{\frac{|CB|}{|CA|}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\beta}}$. De manera análoga encontramos: $\frac{|AN|}{|NQ|}=\sqrt{\frac{|CA|}{|CB|}\cdot\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}}$. Pero, según el teorema de Manelao (véase el problema II.45), $\frac{|PM|}{|MA|}\cdot\frac{|AN|}{|NQ|}\cdot\frac{|QK|}{|KP|}=1$. Por consiguiente, $|QK|/|KP|=1$.

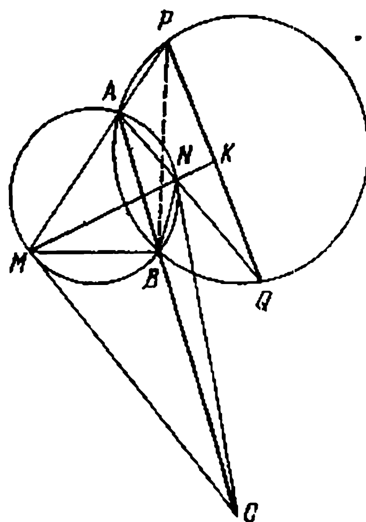


Fig. 35

II.183. Tracemos por M una recta paralela a AC, hasta que se interseque con las rectas BA y BC en los puntos A_1 y C_1. Tenemos: $\angle A_1KM = 90^\circ - \angle DKM = 90^\circ - \angle KBD = \angle BAD = \angle KA_1M$; por lo tanto, ΔKMA_1 es isósceles y $|A_1M| = |MK|$.

De manera análoga $|MC_1| = |ML|$; pero $|KM| = |ML|$, luego, $|A_1M| = |MC_1|$, es decir, la recta BM divide AC por la mitad.

II.184. Sea M el punto de intersección de ND y AB y P, el punto de intersección de las tangentes a la circunferencia en los puntos A y D.

Puesto que las rectas NC, AB y PD son paralelas, entonces de la semejanza de los triángulos correspondientes obtenemos:

$$|AM| = |DP| \cdot \frac{|AN|}{|NP|}, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{|MB|}{|NC|} = \dfrac{|MD|}{|ND|} = \dfrac{|AP|}{|NP|}, \\ |MB| = |NC| \dfrac{|AP|}{|NP|}; \end{array}\right. \qquad (2)$$

pero $|DP| = |AP|$, $|NC| = |AN|$. Por lo tanto, los segundos miembros de las expresiones (1) y (2) son iguales, es decir, $|AM| = |MB|$.

II.185. Consideremos que D es el punto medio de CB y AD corta por segunda vez la circunferencia en el punto K. Demostremos que las tangentes a la circunferencia en los puntos B y C se cortan en la recta MK.

Examinemos el cuadrilátero $CMBK$. Para que las tangentes a la circunferencia en los puntos C y B se intersequen en la diagonal MK, es necesario y suficiente (véase el problema I.234) que
$\frac{|CM|}{|CK|} = \frac{|MB|}{|BK|}$; pero $\frac{|CM|}{|CK|} = \frac{|AB|}{|CK|} = \frac{|BD|}{|DK|} = \frac{|CD|}{|DK|} = \frac{|AC|}{|BK|} = \frac{|MB|}{|BK|}$. (En la primera

y la última igualdades se ha valido del hecho de que $|CM| = |AB|$, $|AC| = |MB|$ en vista del paralelismo de AM y CB; en la segunda y la cuarta, de la semejanza del $\triangle ABD$ y el $\triangle CDK$, el $\triangle ADC$ y el $\triangle KDB$, en la tercera, el hecho de que AD es la mediana.)

II.186. Sea O el centro de la circunferencia; sean N_1, M_1, P_1, R_1 los puntos simétricos a los puntos N, M, P, R, respectivamente,

Fig. 36

en cuanto a la recta OA; K, el punto de intersección de las rectas N_1R_1 y QS. Hace falta demostrar que los puntos R_1, S y K coinciden. Los puntos N_1, M_1 y B se hallan en una recta, simétrica a la recta NMC; N_1, P_1, R_1 también se encuentran en una recta, simétrica a la recta NPR (fig. 36). Los puntos B, N_1, Q y K se sitúan en una circunferencia, puesto

que $\angle BN_1K = \angle M_1N_1P_1 = \angle MNP = \angle PQM = \angle BQK$. Los puntos B, N_1, Q, R_1 también están en una circunferencia, puesto que $\angle N_1R_1B = \angle N_1P_1P = \angle N_1QP = \angle N_1QB$. Por consiguiente, los cinco puntos B, N_1, Q, R_1, K se hallan en una circunferencia; pero los puntos N_1, R_1 y K se encuentran en una recta, por lo tanto, R_1 y K se unen.

II.187. Limitémonos al caso, en que ABC es un triángulo acutángulo. Examinemos el paralelogramo A_1MON (M y N se hallan en A_1B_1 y A_1C_1). Puesto que A_1O forma con A_1C_1 y A_1B_1 ángulos de $(90° - \angle B)$ y $(90° - \angle C)$, entonces

$$\frac{|A_1M|}{|A_1N|} = \frac{|A_1M|}{|MO|} = \frac{\cos B}{\cos C} = \frac{|A_1L|}{|A_1K|}.$$

II.188. Las afirmaciones del problema se deducen del hecho tal: si en cada lado del triángulo se construyen las circunferencias de manera que la suma de las magnitudes angulares de sus arcos (dispuestos del mismo lado que el triángulo) sea igual a 2π, estas circunferencias tienen un punto común.

II.189. Tomemos los puntos E_1 y F_1 simétricos a los puntos E y F respecto a AB. Después de esto el problema se reduce al caso particular del problema II.186.

II.190. En la prolongación de AC tomemos por el punto C un punto M de modo que $|CM| = |CB|$; entonces E es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor de AMB ($|AE| = |BE|$, $\angle AEB = \angle ACB = 2\angle AMB$). De esto se deduce que F es el punto medio de AM y DF divide el perímetro

del $\triangle ABC$ por la mitad. Además, DF es paralela a BM, mientras que BM lo es a la bisectriz del ángulo C del triángulo ABC, es decir, DF es la bisectriz del ángulo D en el triángulo DKL, donde K y L son los puntos medios de AC y CB.

II.191. Supongamos que la recta corta los lados AC y AB del triángulo ABC en los puntos M y N. Designemos: $|AM| + |AN| = 2l$. El radio de la circunferencia con el centro en MN que es tangente a AC y AB, es igual a $\frac{S_{AMN}}{l}$ y, según la condición, $\frac{S_{AMN}}{l} = \frac{S_{ABC}}{p} = r$, donde p y r son, respectivamente, el semiperímetro y el radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$.

II.192. Demostremos que, para la homotecia con el centro en M y la razón $-1/2$, el punto N se transforma en I (es evidente que para esta homotecia I pasa a S). En el triángulo ABC dado A_0, B_0 y C_0 son, respectivamente, los puntos medios de los lados BC, CA y AB; A_1 es un punto tomado en el lado BC tal que AA_1 divide el perímetro por la mitad. Es fácil ver que A_1 es el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita con el lado BC; ésta también es tangente a las prolongaciones de AB y AC; A_2 es el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el lado BC. Tenemos: $|BA_2| = |CA_1|$. Levantemos del punto A_2 la perpendicular hacia BC; designemos por D su punto de intersección con AA_1. Repitiendo los razonamientos aducidos en la solución del problema II.179, demostre-

mos que $|A_2I| = |ID|$. Por consiguiente, la recta A_0I es paralela a AA_1. Para la homotecia, de la cual se ha hablado al comienzo, la recta AA_1 se transformará en la recta A_0I. Precisamente de la misma manera dos rectas que dividen el perímetro por la mitad, pasarán, respectivamente a B_0I y C_0I. Por lo tanto, estas tres rectas se cortan en un punto N tal, el cual pasa a I, al existir esta homotecia. De esto se deduce la afirmación del problema.

II.193. a) Haciendo uso de las fórmulas $r = \frac{S}{p}$, $R = \frac{abc}{4S}$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donde S es el área del triángulo ABC para el segundo miembro, demostramos fácilmente la correlación requerida.

b) Válgase de la fórmula de Leibniz (problema II.140), tomando como M el centro del círculo circunscrito.

c) Hágase uso de la fórmula de Leibniz (problema II.140), tomando como M el centro del círculo inscrito. Para calcular, por ejemplo, $|MA|^2$ bajemos la perpendicular MK sobre AB; tenemos: $|MK| = r$, $|AK| = p - a$; por consiguiente, $|AM|^2 = (p - a)^2 + r^2$. De manera análoga se calculan $|MB|^2$ y $|MC|^2$. Al simplificar el segundo miembro, utilícese el resultado del punto a).

d) Sea M el punto de intersección de la bisectriz del ángulo B con la circunferencia circunscrita. Si $|IO| = d$, entonces $|BI| \times |IM| = R^2 - d^2$. El triángulo ICM es isósceles $(|IM| = |CM|)$, puesto que $\angle CIM = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$ y $\angle ICM =$

$= \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$. Por consiguiente,

$$R^2 - d^2 = |BI| \cdot |IM| = |BI| \cdot |CM| =$$

$$= \frac{r}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}} \cdot 2R \operatorname{sen}\frac{B}{2} = 2Rr.$$

e) Se demuestra de manera análoga al punto d).

f) La distancia entre las proyecciones de I e I_a sobre AC es igual a a. Tomemos el punto K de modo que $IK \parallel AC$, $I_aK \perp AC$. En el triángulo rectángulo IKI_a tenemos: $\angle KII_a = \frac{1}{2}\angle A$, $|IK| = a$, $|I_aK| = r_a - r$. De este modo $|II_a|^2 = \frac{|IK|^2}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} 2|IK| \operatorname{tg}\frac{A}{2} = 4R(r_a - r)$.

II.194. Tracemos por O las rectas paralelas a AB y AC y designemos por L y K los puntos de intersección de estas rectas con las perpendiculares bajadas desde I_a sobre AB y AC, respectivamente. Demostremos la semejanza de los triángulos AB_1C_1 y OLK. Tenemos: $\angle B_1AC_1 = \angle LOK$,

$$|AB_1| = \frac{bc}{c+a}, \quad |AC_1| = \frac{bc}{b+a}, \quad |OL| = p - \frac{c}{2} = \frac{1}{2}(a+b), \quad |OK| = p - \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(a+c);$$

de esta manera, $\frac{|AB_1|}{|OL|} = \frac{|AC_1|}{|OK|} = \frac{2bc}{(c+a)(b+a)}$. Pero OI_a es el diámetro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle OLK$. Por con-

siguiente. $|B_1C_1| = \frac{2bc}{(c+a)(b+a)}|LK| =$
$= \frac{2bc}{(c+a)(b+a)}|OI_a| \operatorname{sen} A = \frac{abc}{(c+a)(b+a)R} \cdot |OI_a|$.

II.196. Demuéstrese que el área Q_a del triángulo con vértices en los puntos de tangencia de la circunferencia exinscrita con el centro I_a puede calcularse según la fórmula $Q_a =$
$= S_{ABC}\frac{r_a}{2R} = \frac{S^2_{ABC}}{2R(p-a)}$, donde todas las designaciones son las mismas que en el problema II.193. Fórmulas análogas pueden obtenerse para las áreas de otros triángulos. (Véase la solución del problema I.240.)

II.197. Supongamos que O es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$, B_1, el punto medio de AC, N, el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con AC: entonces, $|AN| = p - a$, $|CN| = p -$
$- c$ (véase el problema I.18), $|ON|^2 =$
$= |OB_1|^2 + |B_1N|^2 = |AO|^2 - |AB_1|^2 +$
$+ |B_1N|^2 = R^2 - \frac{b^2}{4} + \left(p - a - \frac{b}{2}\right)^2 =$
$= R^2 - (p-a)(p-c)$. De manera análoga, tras determinar los cuadrados de distancias hasta otros puntos de tangencia y sumándolos, obtenemos que la suma buscada es igual a $3R^2 - (p-a)(p-c) - (p-c)(p-b) -$
$- (p-b)(p-a) = 3R^2 - M$. Usando para el área del triángulo la fórmula de Herón y las fórmulas $S = pr$, $S = \frac{abc}{4R}$, obtenemos $r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$, $4Rr = \frac{abc}{p}$. Sumando las últimas igualdades y utilizando la identidad $(p-a)(p-b)(p-c) + abc =$

$= p((p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+$ $+(p-c)(p-a)) = pM$, encontramos que $M = 4Rr + r^2$. *Respuesta*: $3R^2 - 4Rr - r^2$.

II.198. El producto de las longitudes de segmentos desde el vértice A del triángulo ABC hasta los puntos de intersección del lado AB con la circunferencia dada valdrá lo mismo que el producto para el lado AC. Cada uno de estos segmentos puede expresarse fácilmente a través de los lados del triángulo y las cuerdas examinadas. De esta manera obtenemos un sistema de tres ecuaciones que permite expresar las cuerdas por medio de los lados del triángulo. Para no analizar una por una todas las variantes, es cómodo elegir algún sentido de recorrido del triángulo y considerar dirigidos los segmentos y sus longitudes, como números reales arbitrarios.

II.199. Sean K_1 y L_1 tales puntos en BC y BA, que $K_1K \parallel L_1L \parallel B_1B$. Es suficiente demostrar que los triángulos BK_1K y BL_1L son semejantes, es decir,

$\frac{|BK_1|}{|K_1K|} = \frac{|BL_1|}{|L_1L|}$. Tenemos: $\frac{|BK_1|}{|BA_1|} = \frac{|B_1K|}{|B_1A_1|}$; $\frac{|K_1K|}{|BB_1|} = \frac{|A_1K|}{|B_1A_1|}$ y según la propiedad de la bisectriz (problema 1.9) $\frac{|BK_1|}{|K_1K|} = \frac{|B_1K|}{|A_1K|} \times$

$$\times \frac{|BA_1|}{|BB_1|} = \frac{|CB_1|}{|CA_1|} \cdot \frac{|BA_1|}{|BB_1|} = \frac{c}{b} \frac{|CB_1|}{|BB_1|} =$$

$$= \frac{ca}{(c+a)\,|BB_1|}.$$ Esta última expresión es simétrica respecto a a y c y, por lo tanto, es también igual a $\frac{|BL_1|}{|L_1L|}$.

II.200. Sean $\angle KAL = \angle KLA = \varphi$,

$\angle KCL = \angle LKC = \psi$. Entonces, $\angle BKL = 2\varphi$, $\angle BLK = 2\psi$, $2\varphi + 2\psi = 180° - \angle B$. Si Q es el punto de intersección de AL y KC, entonces $\angle AQC = 180° - (\varphi + \psi) = 90° + \frac{1}{2}\angle B$. Tracemos por M la recta paralela a BC hasta que se interseque con KC en el punto N, entonces MQ es la bisectriz del ángulo AMN y $\angle AQN = 90° + \frac{1}{2}\angle B$. De aquí se deduce que Q es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo AMN (véase el problema I.46); por consiguiente, el $\triangle AMN$ es semejante al $\triangle KBL$, mientras que el $\triangle KMN$ lo es al $\triangle KBC$. Sean $|AK| = |KL| = |LC| = x$, $|AM| = y$, $|MN| = z$. Entonces, $\frac{z}{a-x} = \frac{y}{c-x}$, $\frac{y-x}{c-x} = \frac{z}{a}$, de donde $y = a$.

II.201. Sea B_1 el punto medio de AC. Prolonguemos la bisectriz hasta que se interseque en el punto B_2 con la perpendicular levantada hacia AC desde el punto B_1. El punto B_2 se halla en la circunferencia circunscrita. Tracemos por M la perpendicular hacia AC; supongamos que L es su punto de intersección con AC; K, con BB_1, entonces $|KM| = |ML|$. Tracemos por K una recta paralela a AC que corta AB y BC en los puntos D y E, respectivamente. Si G y F son las proyecciones de D y E sobre AC, entonces M es el centro del rectángulo $GDEF$; además, el $\triangle DME$ es semejante al $\triangle AB_2C$ ($\triangle DME$ se obtiene a partir del $\triangle AB_2C$ para la homotecia con el centro en B). Tenemos: $\operatorname{ctg} \angle MCL =$

$-\frac{|LC|}{|ML|}=\frac{|LF|}{|ML|}+\frac{|FC|}{|ML|}=\frac{AB_1}{|B_1B_2|}+$
$+2\frac{|FC|}{|EF|}=\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+2\operatorname{ctg}C$. Si B' es la base de la bisectriz, P y T son las proyecciones de N y B', respectivamente, sobre BC, entonces $\operatorname{ctg}\angle NCB=\frac{|PC|}{|NP|}=\frac{|PT|}{|NP|}+$
$+\frac{|TC|}{|NP|}=\frac{|BP|}{|NP|}+2\frac{|TC|}{|B'T|}=\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+$
$+2\operatorname{ctg}C$, es decir, $\angle MCA=\angle NCB$.

II.202. a) Este problema conocido tiene muchas demostraciones diferentes. Aduzcamos una de éstas, basada sobre el siguiente criterio de igualdad de los triángulos. Dos triángulos son iguales si tienen iguales sendos lados correspondientes, los ángulos opuestos a estos lados y las bisectrices de estos ángulos. Demostremos este criterio. Examinemos dos triángulos ACB y ACB_1, en los cuales $\angle B=$ $=\angle B_1$ (B y B_1 se hallan a un lado de AC). Estos triángulos tienen una circunferencia circunscrita común. Se puede considerar que B y B_1 se sitúan a un lado del diámetro de esta circunferencia, siendo éste perpendicular a AC. Supongamos que la bisectriz del ángulo B corta AC en el punto D y la bisectriz del ángulo B_1, en el punto D_1; M es el punto medio de AC, N, el punto medio del arco AC que no contiene los puntos B y B_1. Los puntos B, D y N se hallan en una recta, los puntos B_1, D_1 y N, también. Supongamos que B y B_1 no coinciden y, por consiguiente, tampoco coinciden D y D_1. Supongamos que $|MD|>$ $>|MD_1|$; entonces $|BN|<|B_1N|$, $|DN|>|D_1N|$. Por consiguiente, $|B_1D_1|$

$= |B_1N| - |ND_1| > |BN| - |ND| =$ $= |BD|$, lo que es una contradicción. Ahora, sea que en el $\triangle ABC$ la bisectriz AA_1 es igual a la bisectriz CC_1. Apliquemos el criterio recién demostrado a los triángulos BAA_1 y BCC_1.

b) Si las bisectrices de ambos ángulos exteriores A y C del triángulo ABC se encuentran en el interior del ángulo B, se puede demostrar precisamente de la misma manera como en el punto a).

Sea que estas bisectrices están dispuestas fuera del ángulo B. Consideremos que $|BC| >$ $> |BA|$. Tomemos en CB el punto B_1 de tal manera que $|CB_1| = |AB_1|$. Designemos $\angle B_1AC = \angle BCA = \alpha$, $\angle B_1AB = \varphi$, L es el punto de intersección de la bisectriz exterior del ángulo C con AB, M es el punto de intersección de la bisectriz exterior del ángulo A con CB. Las demás designaciones se comprenderán al examinar la fig. 37. Según la condición, $|CL| = |AM|$, además, $|CL_1| =$ $= |AM_1|$, puesto que el $\triangle B_1AC$ es isósceles, $|CM_1'| = |AM|$, por cuanto $\triangle CL_1M_1' =$ $= \triangle AM_1M$. Además, $|CM_1''| > |CM_1'|$, ya que $\angle M_1''M_1'C > \angle M_1'CA > 90°$. Por otra parte, los puntos C, A, L y M_1'' se hallan en una circunferencia, en la cual el ángulo agudo apoyado sobre LC ($\angle LAC$) es mayor que el ángulo agudo que se apoya sobre $M_1''C$. Por consiguiente, $|AM| = |CM_1'| < |CM_1''| <$ $< |CL|$. Es una contradicción.

En el caso general, de la igualdad de las bisectrices de los ángulos exteriores no se deduce que el triángulo es isósceles. En el

problema I.256 se da un ejemplo de semejante triángulo.

II.203. Supongamos que ABC es el triángulo dado, AA_1, BB_1, CC_1 son las bisectrices.

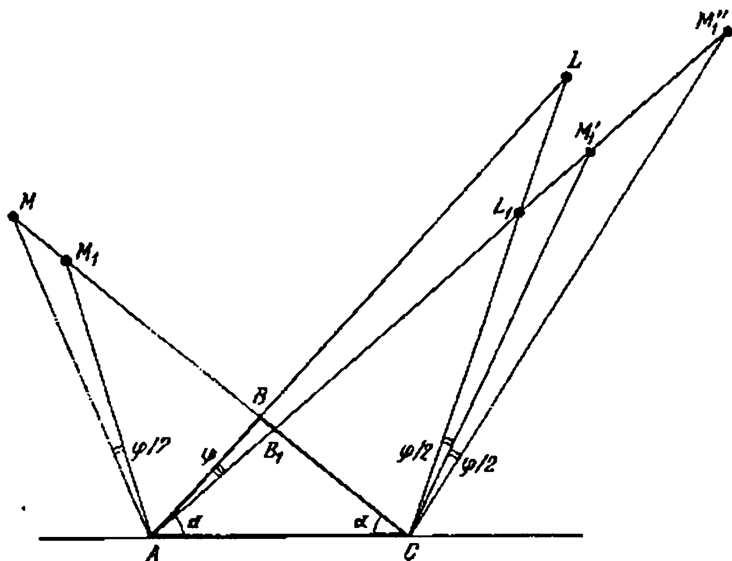


Fig. 37

Si $|A_1B_1| = |A_1C_1|$, entonces $\angle A_1B_1C = \angle A_1C_1B$ (en este caso, el $\triangle ABC$ será isósceles) o bien $\angle A_1B_1C + \angle A_1C_1B = 180°$. En el segundo caso hagamos girar el $\triangle A_1B_1C$ alrededor del punto A_1 al ángulo $B_1A_1C_1$. A consecuencia de esto, los triángulos A_1C_1B y A_1B_1C resultarán aplicados uno a otro y formarán el triángulo semejante al $\triangle ABC$. Si los lados del $\triangle ABC$ son a, b y c, los lados del triángulo obtenido serán iguales a $\frac{ac}{b+c}$,

$\frac{ab}{b+c}$ y $\frac{ac}{a+b}+\frac{ab}{a+c}$. Tomando en consideración su semejanza, obtenemos:

$$\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}-\frac{a}{b+c}\Leftrightarrow b^3+c^3-a^3+b^2c+$$
$$+b^2a+c^2b+c^2a-a^2b-a^2c+abc=0. \qquad (1)$$

Designemos: $\cos\angle BAC = x$. Según el teorema de los cosenos $b^2+c^2-a^2=2bcx$. Multiplicando la última igualdad sucesivamente por a, b y c y restándola de (1), obtenemos

$$2x(a+b+c)+a=0\Leftrightarrow a=-\frac{2(b+c)x}{2x+1}.$$

Puesto que $0<a<b+c$, resulta que

$$-\frac{1}{4}<x<0. \qquad (2)$$

Al sustituir en el teorema de los cosenos a por b, c y x, y, al designar $b/c=\lambda$, para λ obtenemos la ecuación $(4x+1)\lambda^2-2\lambda\times\times(4x^3+8x^2+x)+4x+1=0$. Para que esta ecuación tenga solución ($\lambda>0$, $\lambda\neq 1$) para las condiciones de (2), deben cumplirse las desigualdades

$$4x^3+8x^2+x>0, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{4}D=(4x^3+8x^2+x)^2-(4x+1)^2=$$
$$=(2x+1)^2(x+1)(2x-1)\times$$
$$\times(2x^2+5x+1)>0. \qquad (4)$$

donde D es el discriminante de la ecuación cuadrática. El sistema de desigualdades (2),

(3), (4) se satisface, cuando $-\frac{1}{4} < x < \frac{\sqrt{17}-5}{4}$.

De esta manera, el triángulo de partida no es obligatoriamente isósceles. Sin embargo, está demostrado que esto puede tener lugar sólo en el caso de que uno de los ángulos del triángulo inicial sea obtuso y su coseno se halle en el intervalo de $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{17}-5}{4}\right)$, lo que corresponde aproximadamente a un ángulo de 102°40′ a 104°28′. Si $x = -\frac{1}{4}$, el triángulo construido degenerará, cuando $x = \frac{\sqrt{17}-5}{4}$, tendremos $\angle A_1B_1C = \angle A_1C_1B = 90°$, es decir, los dos casos, especificados al comienzo de la resolución, coinciden para este valor del ángulo.

II.204. Sea M el punto de intersección de AD y KL:

$$\frac{|KM|}{|ML|} = \frac{S_{AKD}}{S_{ALD}} = \frac{\frac{1}{2}|AK|\cdot|AD|\operatorname{sen}\angle KAD}{\frac{1}{2}|DL|\cdot|AD|\operatorname{sen}\angle ADL} = \frac{|AK|\cdot|CD|}{|DL|\cdot|AF|}.$$

(Se ha aprovechado el hecho de que los senos de los ángulos inscritos son proporcionales a las cuerdas.) De manera análoga, si M_1 es el punto de intersección de BE y KL, obtenemos: $\frac{|KM_1|}{|M_1L|} = \frac{|BK|\cdot|FE|}{|LE|\cdot|BC|}$. Pero de

la semejanza de los $\triangle AKF$ y $\triangle BKC$, $\triangle CLD$ y $\triangle FLE$ tenemos: $\frac{|AK|}{|AF|} = \frac{|BK|}{|BC|}$, $\frac{|CD|}{|DL|} = \frac{|FE|}{|LE|}$; multiplicando estas igualdades, obtenemos que $\frac{|KM|}{|ML|} = \frac{|KM_1|}{|M_1L|}$, es decir, M y M_1 coinciden. *Observación.* Se puede mostrar que la afirmación del problema sigue vigente si A, B, C, D, E y F son seis puntos arbitrarios de la circunferencia. De ordinario, el teorema de Pascal se enuncia del modo siguiente: si A, B, C, D, E, F son puntos dispuestos en una circunferencia, entonces los tres puntos, en los cuales se intersecan las rectas AB y DE, BC y EF, CD y FA, se hallan en una recta.

II.205. Sea N el punto de intersección de la recta A_2A_1 con la circunferencia, distinto de A_2. Apliquemos al hexágono $ABCC_2NA_2$ (posiblemente, con puntos múltiples) el teorema de Pascal (problema II.204). Los puntos de intersección de las rectas AB y C_2N, BC y NA_2 (punto A_1), CC_2 y AA_2 (punto M) se hallan en una recta. Por consiguiente, AB y C_2N se intersecan en el punto C_1.

II.206. Sean dadas dos rectas mutuamente perpendiculares, o sea los ejes x e y del sistema de coordenadas rectangulares. Entonces, las alturas del triángulo se sitúan en las rectas $y = k_ix$ ($i = 1, 2, 3$); los lados del triángulo en este caso deben tener los coeficientes angulares $-\frac{1}{k_i}$ y de la condición de pertenencia de los vértices (x_i, y_i) a las alturas encontra-

mos las razones de los términos libres c_i en las ecuaciones de los lados $k_i y + x = c_i$: $c_1 = k_1 y_3 + x_3$, $c_2 = k_2 y_3 + x_3$, $y_3 = y_3 = k_3 x_3 \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{k_1 k_3 + 1}{k_2 k_3 + 1}$, etc. Siendo adecuada la elección de la unidad de longitud, se puede adoptar $c_i = \frac{k_i}{k + k_i}$, donde $k = k_1 k_2 k_3$. Los puntos de intersección de la recta $k_i y + x = \frac{k_i}{k + k_i}$ con los ejes: $\left(O, \frac{1}{k + k_i}\right)$ y $\left(\frac{k_i}{k + k_i}, O\right)$, el punto medio ($P_i$) del segmento comprendido entre ellos es $\left(\frac{k_i}{2(k + k_i)}, \frac{1}{2(k + k_i)}\right)$. El coeficiente angular de la recta $P_1 P_2$ es igual a $\left(\frac{1}{2(k + k_2)} - \frac{1}{2(k + k_1)}\right) : \left(\frac{k_2}{2(k + k_2)} - \frac{k_1}{2(k + k_1)}\right) = (k_1 - k_2):(kk_2 - kk_1) = -\frac{1}{k}$. Justamente iguales serán los coeficientes angulares de las rectas $P_2 P_3$ y $P_3 P_1$. Por eso P_1, P_2, P_3 se hallan en una recta (su ecuación es: $ky + x = 1/2$).

Observación. Al unir con ayuda de rectas el punto H de intersección de las alturas del triángulo con los puntos P_1, P_2, P_3, obtenemos un corolario interesante. Supongamos que α_1, α_2, α_3 son los ángulos del triángulo enumerados en sentido contrario a las agujas del reloj, a_1, a_2, a_3 son las rectas, en las cuales yacen los lados opuestos a éstos; por el punto H pasan tres rectas p_1, p_2, p_3 de modo que los ángulos entre p_2 y p_3, p_3 y p_1, p_1 y p_3 (contados

en sentido contrario a las agujas del reloj) son iguales, respectivamente, a α_1, α_2, α_3. Entonces, los puntos de intersección de p_1 con a_1, p_2 con a_2, p_3 con a_3 se sitúan en una recta. Se propone que el lector examine los casos particulares de este teorema (muchos de éstos son unos hechos geométricos bellos y están lejos de ser evidentes) y lo compare con el problema.

Una *observación* más: en nuestro problema, en vez de los puntos medios de los segmentos separados en los lados del triángulo, sería posible tomar los puntos que los dividen en razones iguales. Estos puntos también estarán dispuestos en una recta.

II.207. Para determinar los ángulos del triángulo $A_1B_1C_1$, aprovéchese que los puntos P, A_1, B_1, C_1 se hallan en una circunferencia (lo mismo se hace para otras cuaternas de puntos). Si P es interior al triángulo ABC, entonces $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_2C_2B_2 = \angle APB - \angle ACB$. Para el triángulo escaleno ABC existen ocho puntos diferentes P tales que los triángulos correspondientes $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son semejantes al triángulo ABC (además, el triángulo $A_2B_2C_2$ es igual a éste). Al mismo tiempo, seis puntos son interiores a la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC y dos, fuera de ésta.

II.208. Las rectas examinadas son mediatrices trazadas hacia los lados del triángulo $A_1B_1C_1$.

II.209. Designaciones: ABC, el triángulo dado; M, el punto que se halla a la distancia d respecto del centro de la circunferencia cir-

cunscrita alrededor del triángulo ABC; A_1, B_1, C_1, los pies de las perpendiculares bajadas desde M sobre BC, CA, AB; A_2, B_2, C_2, los puntos de intersección de AM, BM, CM, respectivamente, con la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$; a, b, c, los lados del $\triangle ABC$; a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, los lados de los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$, respectivamente; S, S_1 y S_2, respectivamente, las áreas de estos triángulos. Tenemos:

$$a_1 = |AM| \operatorname{sen} A = |AM| \frac{a}{2R} . \tag{1}$$

De manera análoga se encuentran b_1 y c_1. A partir de la semejanza de los triángulos B_2MC_2 y BMC obtenemos:

$$\frac{a_2}{a} = \frac{|B_2M|}{|CM|} = \frac{|C_2M|}{|BM|} . \tag{2}$$

Para $\frac{b_2}{b}$ y $\frac{c_2}{c}$ las razones serán análogas. Los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son semejantes (véase el problema II.207); además,

$$\frac{S_2}{S} = \frac{a_2b_2c_2}{abc} , \tag{3}$$

Al tomar todo esto en consideración, tendremos:

$$\left(\frac{S_1}{S}\right)^3 = \frac{S_1^3}{S_2^3} \cdot \frac{S_2^3}{S^3} = \frac{a_1^2b_1^2c_1^2}{a_2^2b_2^2c_2^2} \cdot \frac{a_2^3b_2^3c_2^3}{a^3b^3c^3} =$$

$$= \left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 \frac{|AM|^2 \, |BM|^2 \, |CM|^2 \, a^2b^2c^2}{a^3b^3c^3} \cdot a_2b_2c_2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 |AM|^2 \, |BM|^2 \, |CM|^2 \cdot \frac{|B_2M|}{|CM|} \, \frac{|C_2M|}{|AM|} \times$$

$$\times \frac{|A_2M|}{|BM|} = \left(\frac{1}{4R^2} \, |R^2 - d^2|\right)^3 .$$

(En la segunda igualdad se ha usado la semejanza del $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ y la igualdad (3); en la tercera igualdad, las fórmulas (1); en la cuarta, las fórmulas (2)). *Observación.* Cuando $d = R$, el área del triángulo formado por los pies de las perpendiculares resulta ser igual a cero, es decir, estos pies se disponen en una recta. Esta última se llama recta de Simson (véase el problema II.153).

II.210. La afirmación se deduce de un hecho más general: si en los lados del triángulo están construidas unas circunferencias de modo que sus arcos dispuestos fuera del triángulo suman 4π o bien 2π, estas circunferencias tienen un punto común (en nuestro caso en calidad de semejante triángulo puede tomarse el triángulo con vértices en los puntos medios del $\triangle ABC$ y demostrar que las tres circunferencias que pasan por los puntos medios de AB, AC y AD; BA, BC y BD; CA, CB y CD, tienen un punto común).

II.211. La afirmación se deduce del hecho siguiente. Supongamos que una circunferencia arbitraria corta los lados del ángulo con el vértice N en los puntos A, B y C, D; las perpendiculares levantadas hacia los lados del ángulo en los puntos A y D, se intersecan en el punto K, mientras que las perpendiculares levantadas en los puntos B y C, concurren en el punto L. Entonces, las rectas NK y NL son simétricas respecto a la bisectriz de este ángulo. En efecto, $\angle ANK - \angle ADK$ (los puntos A, K, D y N se hallan en una misma circunferencia). Precisamente de la misma manera $\angle LNC = \angle LBC$. A continuación,

$\angle ADK = 90° - \angle ADN = 90° - \angle NBC = \angle LBC$. (Se suponía que el cuadrilátero $ABCD$ no tiene puntos múltiples).

II.212. Supongamos que A, B, C, D son los puntos dados, D_1 es el punto de intersección de las rectas simétricas a las rectas AD, BD y CD respecto a las bisectrices correspondientes del $\triangle ABC$. En el problema anterior se ha demostrado que las circunferencias de pedal de los puntos D y D_1 respecto al $\triangle ABC$ coinciden. Supongamos que las rectas simétricas a las rectas BA, CA y DA respecto a las bisectrices correspondientes del $\triangle BCD$, se intersecan en el punto A_1. No es difícil demostrar que A_1 y D_1 son simétricos entre sí respecto a la recta CB. Por consiguiente, las circunferencias de pedal de los puntos D (o D_1) respecto al $\triangle ABC$ y A (o A_1) respecto al $\triangle BCD$ pasan por el punto medio de D_1A_1. Al determinar de manera análoga los puntos B_1 y C_1, descubrimos que cada una de las circunferencias de pedal examinadas pasa por los puntos medios de los segmentos correspondientes que unen los puntos A_1, B_1, C_1 y D_1. De tal modo el problema se ha reducido al problema II.210.

II.213. Supongamos que B_2 y C_2 son puntos diametralmente opuestos a los puntos B y C; M es el segundo punto de intersección de B_2B_1 con la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$; C_1' es el punto de intersección de AB y C_2M. Según el teorema de Pascal (problema II.204) aplicado al hexágono AB_2CMBC_2, los puntos O (centro de la circunferencia), B_1 y C_1' se hallan en una recta,

es decir, C_1' coincide con C_1. Pero $\angle BMB_1 = \angle BMB_2 = 90°$, $\angle CMC_1 = \angle CMC_2 = 90°$; por lo tanto M es uno de los puntos de intersección de las circunferencias con los diámetros BB_1 y CC_1. Sea N el segundo punto de intersección de estas circunferencias. Su cuerda común MN contiene el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC, o sea, el punto H (problema II.19). Si BB_0 es la altura del $\triangle ABC$, entonces $|MH| \cdot |HN| = |BH| \cdot |HB_0|$. Por consiguiente (véase el problema II.164), N se halla en la circunferencia de los nueve puntos del $\triangle ABC$.

II.218. Supongamos que el radio de la circunferencia es igual a r y los ángulos entre los radios vecinos, trazados hacia los puntos de tangencia en orden del recorrido, son iguales a 2α, 2β, 2γ, 2δ ($\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$). Entonces

$$S = r^2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta). \qquad (1)$$

Los lados del cuadrilátero serán iguales (encontraremos uno de ellos) a $r (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = r \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$, etc. Puesto que $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\gamma + \delta)$, $\operatorname{sen}(\beta + \gamma) = \operatorname{sen}(\alpha + \delta)$, la fórmula dada en la condición se reduce a la forma

$$S = r^2 \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \operatorname{sen}(\beta+\gamma) \operatorname{sen}(\gamma+\alpha)}{\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \cos\delta}. \qquad (2)$$

Nos queda demostrar la igualdad de los segundos miembros de (1) y (2) a condición de que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$.

II.219. Demostremos que $S_{BNA} = S_{BMC} + S_{AMD}$. Si $\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|CN|}{|ND|} = \lambda$, entonces $S_{BMC} = (1 - \lambda) S_{BAC}$, $S_{AMD} = \lambda S_{BAD}$. Por otra parte, al designar por h_1, h_2 y h las distancias desde C, D y N hasta AB, hallaremos que $h = \lambda h_1 + (1 - \lambda) h_2$. Por consiguiente, $S_{ABN} = \frac{1}{2} | AB | \cdot h = \lambda \frac{1}{2} | AB | h_1 + (1 - \lambda) \frac{1}{2} | AB | h_2 = \lambda S_{ABD} + (1 - \lambda) S_{BAC} = S_{AMD} + S_{BMC}$.

II.221. Los ángulos comprendidos entre los lados, así como entre los lados y las diagonales del cuadrilátero Q_2 se expresan a través de los ángulos entre los lados y entre los lados y las diagonales del cuadrilátero Q_1. (Las diagonales del cuadrilátero Q_2 son perpendiculares a las diagonales correspondientes del cuadrilátero Q_1 y pasan por sus puntos medios.)

II.222. Examínense los paralelogramos $ABMK$ y $DCML$ y demuéstrese que KL divide DA en la misma razón que el punto N, y la recta MN es la bisectriz del ángulo KML.

II.223. Demostremos al principio que las diagonales del cuadrilátero dado se dividen en el punto de intersección por la mitad, es decir, que el cuadrilátero es un paralelogramo. Sea $ABCD$ el cuadrilátero dado; O, el punto de intersección de las diagonales. Supongamos que $| BO | < | OD |$, $| AO | \leqslant | OC |$; examinemos el $\triangle OA_1B_1$, simétrico al $\triangle OAB$ respecto del punto O; es evidente que el radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle OA_1B_1$

es menor que el radio de la inscrita en el $\triangle OCD$, pero según la condición éstos son iguales. Así, pues, O es el punto medio de ambas diagonales. Demostremos que todos los lados del cuadrilátero son iguales. Hagamos uso de la fórmula $S = pr$ (S es el área, p, el semiperímetro y r, el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo). Puesto que en el $\triangle ABO$ y el $\triangle BOC$ las áreas y los radios de las circunferencias inscritas son iguales, son iguales también sus perímetros, es decir, $|AB| = |BC|$.

II.224. De manera análoga a como esto se ha hecho en el problema anterior, demuéstrese que el punto de intersección divide las diagonales del cuadrilátero por la mitad.

II.225. Del enunciado del problema se deduce que $ABCD$ (fig. 38) es un cuadrilátero

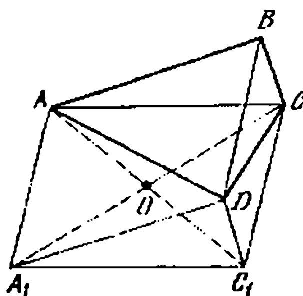


Fig. 38

convexo. Examinemos el paralelogramo ACC_1A_1, en el cual los lados AA_1 y CC_1 son iguales y paralelos a la diagonal BD. Los triángulos ADA_1, CDC_1 y C_1DA_1 son iguales a los triángulos ABD, BCD y ABC, respectivamente. Por consiguiente, los segmentos que

unen D con los vértices A, C, C_1, A_1, dividen el paralelogramo en cuatro triángulos, en los cuales los radios de las circunferencias inscritas son iguales. Si O es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo ACC_1A_1 entonces D ha de coincidir con O (si D, por ejemplo, es interior al $\triangle COC_1$, el radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ADA_1$ es mayor que el radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle AOA_1$ y tanto más en el $\triangle CDC_1$). De esta manera, $ABCD$ es un paralelogramo, pero, además, del problema II.223 se deduce que ACC_1A_1 es un rombo, es decir, $ABCD$ es un rectángulo.

II.226. La condición necesaria y suficiente de que se cumplan los cuatro puntos es la igualdad $|AB|\cdot|CD| = |AD|\cdot|BC|$. Para los puntos a) y b) eso se deduce del teorema de la bisectriz del ángulo interior del triángulo; para los puntos c) y d), del resultado del problema I.234.

II.227. Sea $ABCD$ el cuadrilátero dado. Supongamos que los ángulos A y D son obtusos; B y C, agudos. Designemos los pies de las perpendiculares bajadas desde el vértice A, por M y N, y desde el vértice C, por K y L (fig. 39, *a*); R es el punto de intersección de MN y LK. Notemos que A, K, N, C, L, M se hallan en una circunferencia con diámetro AC. Mostremos que $MK \parallel LN$: $\angle MKL = \angle MAL = 90° - \angle B = \angle KCB =$ $= \angle KLN$. De esta manera, $\frac{|MR|}{|RN|} =$ $= \frac{|MK|}{|LN|} = \frac{\operatorname{sen} \angle MCK}{\operatorname{sen} \angle LAN} = \frac{\operatorname{sen}(\angle C + \angle B - 90°)}{\operatorname{sen}(\angle A + \angle B - 90°)} =$

$= \frac{\cos(\angle A - \angle B)}{\operatorname{sen}(\angle A + \angle B - 90°)}$. Ahora, sea que P y Q son los pies de las perpendiculares bajadas desde el vértice B, y S, el punto de intersección de MN y PQ (fig. 39, *b*). Puesto que $\angle PNB = \angle PAB = \angle C$, entonces $PN \parallel DC$, es decir, $MQNP$ es un

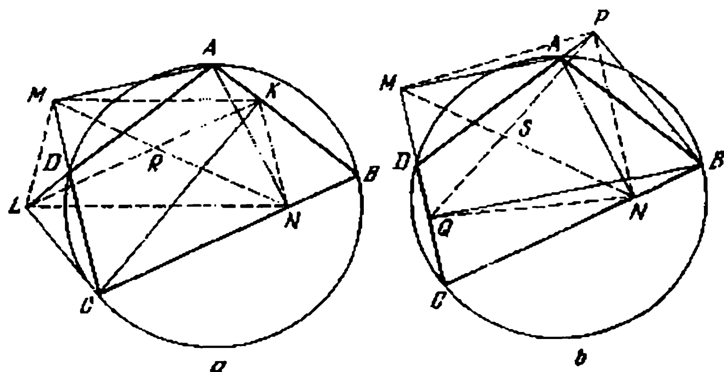


Fig. 39

trapecio ($ANBP$ es un cuadrilátero inscrito, con diámetro AB). De esta manera, $\frac{|MS|}{|SN|} = \frac{|MQ|}{|PN|} = \frac{|AB| \cos(\angle A + \angle D - 180°)}{|AB| \operatorname{sen}(\angle B + \angle A - 90°)} =$

$= \frac{\cos(\angle A - \angle B)}{\operatorname{sen}(\angle A + \angle B - 90°)}$. (Nos hemos valido de que MQ es la proyección de AB sobre DC; el ángulo entre AB y DC en igual a $\angle A +$ $+ \angle D - 180°$). Así, pues, los puntos R y S dividen MN en una misma razón, es decir, ellos coinciden; por lo tanto, las tres rectas se cortan en un punto. Ahora es fácil mostrar que las cuatro rectas concurren en este mismo punto.

II.228. Hallemos en qué razón BC divide MN. Esta razón es igual a la razón $\frac{S_{MCB}}{S_{CBN}} = \frac{|MC| \cos \angle BCD}{|BN| \cos \angle CBA}$. De manera análoga, la razón, en que AD divide MN, es igual a $\frac{|AM| \cos \angle BAD}{|ND| \cos \angle ADC}$. Pero estas razones son iguales, ya que $\angle BCD = \angle BAD$, $\angle CBA = \angle CDA$ y el $\triangle AMC$ es semejante al $\triangle DNB$.

II.229. Tomemos el punto M_1 de modo que $BCMM_1$ sea un paralelogramo. M_1 se halla en la circunferencia que pasa por los puntos B, M y A. Puesto que $|AM_1| = |DM|$ ($ADMM_1$ también es un paralelogramo), los triángulos CDM y BAM_1 son iguales, es decir, el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle CDM$ es igual a R. Será el mismo el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ADM$.

II.230. Designemos por K y L los puntos de tangencia de la circunferencia dada con las rectas AB y AD. Para concretar, supongamos que K y L son interiores a los segmentos AB y AD. En la recta CB tomemos el punto P de modo que $|BP| = |BK|$ y B se halle entre P y C, y en la recta CD, el punto Q, que $|DQ| = |DL|$ y D esté entre C y Q. Tenemos: $|CP| = |CB| + |BK| = |CB| + |AB| - |AK| = |CQ|$. La circunferencia que pasa por P y Q y es tangente a las rectas CB y CD, corta BD en tales puntos M_1 y N_1, para los cuales se cumplen las igualdades $|BM_1| \cdot |BN_1| = |BM| \times |BN|$; $|CN_1| \cdot |CM_1| = |CN| \cdot |CM|$.

De estas igualdades se puede obtener que M_1 y N_1 coincidirán con M y N. De manera análoga se examinan otros casos de disposición de los puntos. El análisis sucesivo de las variantes se evita indicando en las rectas AB, BC, CD y DA las direcciones positivas y examinando los segmentos dirigidos en estas rectas.

II.231. Para concretar, supongamos que B y D se hallan en el interior de la circunferencia. Designemos por P y Q los puntos de intersección de la recta BD con la circunferencia (P es el más próximo a B) y por L, el punto de intersección de CB con la circunferencia; l es la tangente a la circunferencia que pasa por C.

Examinemos el triángulo PCN, desde cuyos vértices parten las rectas PQ, NM y l. Usando el teorema de Ceva (problema II.44) y razonando de la misma manera que en el problema II.49, obtenemos que la condición necesaria y suficiente para que las rectas PQ, NM y l se intersequen en un punto, es el cumplimiento de la igualdad

$$\frac{|PM|}{|MC|}\cdot\frac{|CQ|}{|QN|}\cdot\frac{|NC|}{|CP|}=1 \qquad (1)$$

Por otra parte, en el hexágono $ALPMCQ$ las diagonales AM, LC, PQ se intersecan en un punto. Por consiguiente (véase el problema II.49),

$$|AL|\cdot|PM|\cdot|CQ|=|LP|\cdot|MC|\cdot|QA| \qquad (2)$$

Es evidente que $|NC|=|AL|$, $|QN|=$ $=|LP|$, $|CP|=|QA|$. De esta manera,

de la validez de la igualdad (2) se deduce la de la igualdad (1).

II.232. 1. Puesto que O_1 es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, entonces $\angle BO_1A = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BCA$ (problema I.46). Por lo tanto, $\angle BO_1A = \angle BO_4A$ y el cuadrilátero ABO_1O_4 es inscrito (fig. 40, *a*);

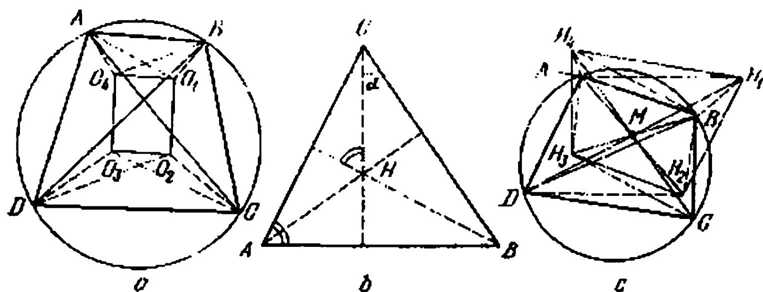


Fig. 40

por consiguiente, el ángulo adyacente al $\angle BO_1O_4$ es igual al $\angle BAO_4 = \frac{1}{2}\angle BAD$. Análogamente, el ángulo adyacente al $\angle BO_1O_2$ es igual a $\frac{1}{2}\angle BCD$. Pero $\frac{1}{2}(\angle BAD + \angle BCD) = 90^\circ$; por tanto, $\angle O_4O_1O_2 = 90^\circ$.

2. Para demostrar la segunda parte mostremos al principio que la distancia desde el vértice del triángulo hasta el punto de intersección de las alturas se determina por completo por la magnitud del ángulo en este vértice y por el largo del lado opuesto, a saber (fig. 40, *b*): $|CH| = |CB| \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\angle CAB} =$

$= \frac{|AB|}{\text{sen}\,\alpha} \cos\alpha = |AB| \operatorname{ctg}\alpha$. Puesto que el cuadrilátero $ABCD$ es inscrito, entonces $|AH_3| = |BH_2|$ y $AH_3 \parallel BH_2$; por consiguiente, ABH_2H_3 es un paralelogramo. De este modo, el punto de intersección de AH_2 y BH_3 divide AH_2 y BH_3 por la mitad. Al examinar otros paralelogramos, obtenemos que los segmentos H_2A, H_3B, H_4C, H_1D se intersecan en un punto (M) que los divide por la mitad, es decir, los cuadriláteros $ABCD$ y $H_1H_2H_3H_4$ son centralmente simétricos respecto al punto M (fig. 40, *c*).

II.233. Si los lados del triángulo ABC opuestos a los vértices A, B y C son iguales a a, b y c, respectivamente, mientras que los ángulos ADB, BDC y CDA son iguales a α, β y γ (suponemos que $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$), las distancias a partir del punto D hasta los puntos de intersección de las alturas de los triángulos ADB, BDC y CDA son iguales a los valores absolutos de las magnitudes $c \operatorname{ctg}\alpha$, $a \operatorname{ctg}\beta$, $b \operatorname{ctg}\gamma$ (véase la solución del problema II.232). No es difícil cerciorarse de que el área del triángulo con vértices en los puntos de intersección de las alturas de $\triangle ADB$, $\triangle BDC$ y $\triangle CDA$ será igual a $\frac{1}{2} c \operatorname{ctg}\alpha \times$ $\times\, a \operatorname{ctg}\beta \,\text{sen}\, B + \frac{1}{2} a \operatorname{ctg}\beta \cdot b \operatorname{ctg}\gamma \,\text{sen}\, C +$ $+ \frac{1}{2} b \operatorname{ctg}\gamma \cdot c \operatorname{ctg}\alpha \,\text{sen}\, A = S_{ABC} \times$ $\times (\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\alpha) =$ $= S_{ABC}$, puesto que la expresión entre paréntesis es igual a 1. (Demuéstrese esto tomando

en consideración que $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$). De manera análoga se examinan otros casos de disposición del punto D (cuando uno de los ángulos α, β, γ es igual a la suma de los dos otros).

II.234. a) Supongamos que $ABCD$ es el cuadrilátero dado, R y Q son los puntos de tangencia de las circunferencias inscritas en el $\triangle ABC$ y el $\triangle ACD$, respectivamente, con la recta AC. Entonces (véase el problema I.18), $|RQ| = ||AQ - |AR|| = \frac{1}{2}|(|AB| + |AC| - |BC|) - (|AD| + |AC| - |CD|)| = \frac{1}{2}||AB| + |CD| - |AD| - |BC||$. Puesto que $ABCD$ es un cuadrilátero circunscrito, resulta que $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$, es decir, $|RQ| = 0$.

b) Si K, L, M, N son los puntos de tangencia de la circunferencia con los lados del cuadrilátero, y K_1, L_1, M_1, N_1 son los puntos de tangencia de las circunferencias inscritas en el $\triangle ABC$ y el $\triangle ACD$ (fig. 41), entonces $N_1K_1 \parallel NK$, $M_1L_1 \parallel ML$. Demostremos que también $K_1L_1 \parallel KL$, $N_1M_1 \parallel NM$. Como las circunferencias inscritas en el $\triangle ACB$ y el $\triangle ACD$ son tangentes una a otra en la diagonal en el punto P, resulta que $|AN_1| = |AP| = |AM|$, es decir, $N_1M_1 \parallel NM$. Por consiguiente, el cuadrilátero $K_1L_1M_1N_1$, al igual que el cuadrilátero $KLMN$, es inscrito.

II.235. Supongamos que (fig. 42, *a*, *b*) O_1, O_2, O_3, O_4 son los centros, respectivamente, de las circunferencias inscritas en $\triangle ABC$,

$\triangle BCD$, $\triangle CDA$ y $\triangle DAB$. Puesto que $O_1O_2O_3O_4$ es un rectángulo (véase el problema II.232), entonces $|O_1O_3| = |O_2O_4|$. Si K y L son

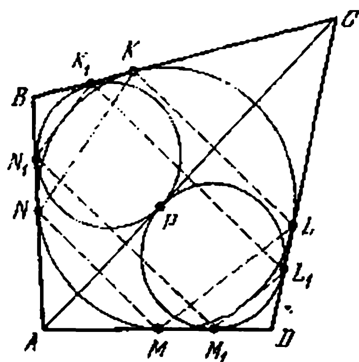


Fig. 41

los puntos de tangencia de las circunferencias inscritas en el $\triangle ABC$ y el $\triangle ACD$, con AC,

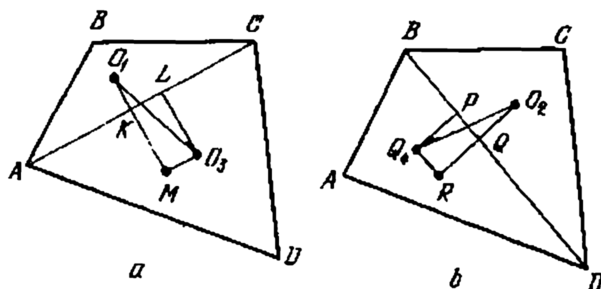


Fig. 42

entonces $|KL| = \frac{1}{2}\big|\,|AB| + |CD| - |BC| - |AD|\,\big|$ (véase la solución del problema II.234). Análogamente, si P y Q

son los puntos de tangencia de las circunferencias correspondientes con BD, entonces $|PQ| = |KL|$. Tracemos por O_3 la recta paralela a AC hasta que se interseque con la prolongación de O_1K. Obtenemos el $\triangle O_1O_3M$, de manera análoga construiremos el $\triangle O_2O_4R$. Estos dos triángulos rectángulos son iguales, ya que tienen $|O_1O_3| = |O_2O_4|$, $|O_3M| = |KL| = |PQ| = |O_4R|$. Por consiguiente, $|O_1M| = |O_2R|$; pero $|O_1M|$ es igual a la suma de radios de las circunferencias inscritas en el $\triangle ABC$ y el $\triangle ACD$, mientras que $|O_2R|$ es igual a la suma de radios de las circunferencias inscritas en el $\triangle ACD$ y el $\triangle BDA$ (véase también el problema II.315).

II.236. Supongamos que en el cuadrilátero $ABCD$ (fig. 43) $|AB| = a$, $|BC| = b$,

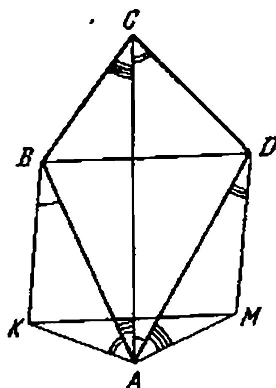


Fig. 43

$|CD| = c$, $|DA| = d$, $|AC| = m$, $|BD| = n$. Construyamos en el lado AB hacia el exterior el triángulo AKB semejante al triángulo ACD; además, $\angle BAK = \angle DCA$,

$\angle ABK = \angle CAD$ y en el lado AD construyamos el $\triangle AMD$ semejante al $\triangle ABC$, $\angle DAM = \angle BCA$, $\angle ADM = \angle CAB$. A partir de la semejanza correspondiente obtenemos: $|AK| = \frac{ac}{m}$, $|AM| = \frac{bd}{m}$, $|KB| = |DM| = \frac{ad}{m}$. Además, $\angle KBD + \angle MDB = \angle CAD + \angle ABD + \angle BDA + \angle CAB = 180°$, es decir, el cuadrilátero $KBDM$ es un paralelogramo. Por lo tanto, $|KM| = |BD| = n$. Pero $\angle KAM = \angle A + \angle C$. Según el teorema de los cosenos para el $\triangle KAM$ tenemos: $n^2 = \left(\frac{ac}{m}\right)^2 + \left(\frac{bd}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{ac}{m}\right)\left(\frac{bd}{m}\right) \times \cos(A + C)$, de donde $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd \cos(A + C)$.

II.237. La afirmación del teorema de Tolomeo es el corolario del teorema de Bretschneider (véase el problema II.236), puesto que para el cuadrilátero inscrito $\angle A + \angle C = 180°$.

II.238. Si MB es el mayor de los segmentos $|MA|$, $|MB|$, $|MC|$, entonces, al aplicar el teorema de Bretschneider (problema II.236) al cuadrilátero $ABCM$, obtenemos que $|MB|^2 = |MA|^2 + |MC|^2 - 2|MA| \cdot |MC| \times \cos(\angle AMC + 60°)$, es decir, $|MB| < |MA| + |MC|$, puesto que $\angle AMC \neq 120°$.

II.239. Al sustituir en la expresión

$$t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta} \qquad (1)$$

los segmentos de las tangentes por las fórmulas obtenidas durante la solución del problema I.201, cerciorémonos de que, si la correla-

ción (1) se cumple para ciertas circunferencias α, β, γ y δ que son tangentes a la circunferencia dada en los puntos A, B, C y D, respectivamente, entonces la misma se cumple para cualesquiera circunferencias de este tipo. Queda por verificar la validez de la correlación (1) para algún caso particular. Si α, β, γ y δ son circunferencias de radio cero, obtenemos el teorema de Tolomeo corriente (problema II.237). Es posible, para no alegar el teorema de Tolomeo, tomar las circunferencias α y δ de radio cero, las circunferencias β y γ tangentes tanto a la circunferencia circunscrita alrededor del cuadrilátero $ABCD$, como tangentes a la cuerda AD. En este caso la validez de la correlación (1) se comprueba fácilmente. De aquí, en correspondencia con la observación hecha, deriva su validez en todos los casos (con esto también queda demostrada simultáneamente el teorema de Tolomeo corriente).

II.240. Al demostrar nuestra afirmación, valgámonos del procedimiento llamado «dilatación» de circunferencias. La esencia de este procedimiento consiste en lo siguiente. Sea que dos circunferencias, por ejemplo, α y β, son tangentes a cierta circunferencia Σ exteriormente. Examinemos las circunferencias α', β' y Σ', concéntricas a α, β y Σ, respectivamente. Además, si el radio de la circunferencia Σ' es mayor que el radio de la circunferencia Σ en la magnitud χ, y los radios de las circunferencias α' y β' son menores que los radios de α y β en la misma magnitud χ (χ es suficientemente pequeña), las circunferencias α' y β' serán tangentes a la circun-

ferencia Σ' exteriormente y la tangente exterior común a las circunferencias α' y β' es igual a la tangente exterior común a las circunferencias α y β. De la misma manera se examina el caso, en que α y β son tangentes a Σ por el interior. Pero si α y β son tangentes a Σ una por el exterior y la otra por el interior, al aumentar el radio de Σ, el radio de la primera disminuye y el de la segunda, crece, al mismo tiempo la tangente interior común a las circunferencias α' y β' no varía.

Examinemos, para concretar, el caso, en que en la igualdad (*) (véase la condición del problema) figuran sólo los segmentos de las tangentes exteriores comunes. (Notemos que ninguna de las circunferencias puede encontrarse en el interior de otra.) Demostremos que las circunferencias α, β, γ y δ son tangentes a cierta circunferencia Σ de modo igual: todas ellas la tocan por el exterior o bien por el interior. Supongamos que no todos los radios de las circunferencias α, β, γ y δ son iguales entre sí (el caso de radios iguales se examina fácilmente por separado) y, para concretar, r_α, el radio de la circunferencia α, es el mínimo. Examinemos las circunferencias α', β', γ', δ', donde α' es la circunferencia de radio cero, o sea el punto que coincide con el centro de la circunferencia α, mientras que β', γ', δ' son las circunferencias concéntricas a las circunferencias β, γ, δ con radios reducidos en la magnitud r_α. Para los razonamientos ulteriores sirvámonos de la afirmación siguiente, designándola con la letra (T): si β' γ', δ' son tres circunferencias, ninguna de las

cuales es interior a otra y por lo menos una de ellas no tiene radio cero, existen precisamente dos circunferencias Σ_1 y Σ_2, cada una de las cuales es tangente a las circunferencias β', γ' y δ' de manera igual (T).

Regresaremos a esta afirmación al final de la resolución.

En las circunferencias Σ_1 y Σ_2 tomemos los puntos α_1 y α_2 de tal manera que $\frac{t_{\alpha_1\beta'}}{t_{\alpha_1\delta'}} =$

$= \frac{t_{\alpha_2\beta'}}{t_{\alpha_2\delta'}} = \frac{t_{\alpha'\beta'}}{t_{\alpha'\delta'}} = \lambda$; además, α_1 y α_2 se sitúan en los arcos que no contienen los puntos de tangencia a la circunferencia γ'. Para tres cuaternas de circunferencias $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, $(\alpha_1, \beta', \gamma', \delta')$, $(\alpha_2, \beta', \gamma', \delta')$ se cumple la correlación (*); para la primera, es la afirmación de nuestro problema, para las demás dos, esto se hace sobre la base de la afirmación del problema II.239. (α', α_1, α_2 son circunferencias de radio cero.) Por consiguiente,

$$\frac{t_{\alpha_1\beta'}}{t_{\alpha_1\gamma'}} = \frac{t_{\alpha_2\beta'}}{t_{\alpha_2\gamma'}} = \frac{t_{\alpha'\beta'}}{t_{\alpha'\gamma'}} = \mu.$$

Pero el lugar geométrico de los puntos M, para los cuales la razón entre las tangentes y dos circunferencias fijas es constante, es una circunferencia (véase el problema I.11). Por consiguiente, α_1, α_2 y α' pertenecen tanto al lugar geométrico de los puntos, para los cuales la razón entre las tangentes trazadas a las circunferencias β' y δ' es igual a λ, como al lugar geométrico de los puntos, para los cuales la razón entre las tangentes trazadas a las

circunferencias β' y γ' es igual a μ. Pero esto significa que α' ha de coincidir con α_1 o α_2.

Supongamos que α_1 y α_2 coinciden. Demostremos que en este caso las circunferencias determinadas por los parámetros λ y μ se tocan. Tomemos $\tilde{\lambda} \neq \lambda$, pero suficientemente próximo a λ, $\tilde{\lambda}$ determinará en Σ_1 y Σ_2 dos puntos $\tilde{\alpha}_1$ y $\tilde{\alpha}_2$, para los cuales $\frac{t_{\tilde{\alpha}_1\beta'}}{t_{\tilde{\alpha}_1\delta'}} = \frac{t_{\tilde{\alpha}_2\beta'}}{t_{\tilde{\alpha}_2\delta'}} = \tilde{\lambda}$.

Encontremos: $\tilde{\mu} = \frac{t_{\tilde{\alpha}_1\beta'}}{t_{\tilde{\alpha}_1\gamma'}} = \frac{t_{\tilde{\alpha}_2\beta'}}{t_{\tilde{\alpha}_2\gamma'}}$. Por consiguiente, las circunferencias que corresponden a los parámetros $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\mu}$, tienen la cuerda común $\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2$. Si $\tilde{\lambda} \to \lambda$, entonces $\tilde{\mu} \to \mu$, $|\tilde{\alpha}_1\alpha_2| \to 0$, es decir, las circunferencias que corresponden a los parámetros λ y μ, entran en contacto en el punto $\alpha_1 = \alpha_2$. De esta manera, α', β', γ' y δ' son tangentes a Σ_1 o Σ_2. «Dilatando», respectivamente, Σ_1 o Σ_2 en la magnitud $\pm r_\alpha$, obtenemos que α, β, γ y δ son tangentes a cierta circunferencia o recta (Σ_1 o Σ_2 pueden ser una recta) o tienen un punto común.

Si en la igualdad (*) algunos de los segmentos son segmentos de tangentes interiores comunes, es necesario demostrar la existencia de la circunferencia Σ que es tangente a α, β, γ y δ y de otra tal, que aquellas de las circunferencias α, β, γ y δ, para las cuales en la igualdad (*) figura la tangente interior común, son tangentes a Σ de modos diferentes. De manera correspondiente tiene que cambiarse la afirmación (T).

Volvamos a la afirmación (T). Haciendo la «dilatación», es posible reducir la afirmación al caso, en que una de las circunferencias β', γ', δ' tiene radio cero, o sea es un punto. El lector instruido de lo que es la «inversión», demostrará fácilmente que la afirmación (T) ahora resulta ser equivalente a la afirmación de que cualesquiera dos circunferencias no dispuestas una en el interior de la otra tienen precisamente dos tangentes exteriores comunes. (Véase el Apéndice). *Observación*. Si tres de las cuatro circunferencias dadas α, β, γ, δ tienen radio cero, o sea son puntos, se puede simplificar sustancialmente la demostración. Hágase por su cuenta. En lo ulterior (véase el problema II.287) necesitaremos precisamente este caso particular.

II.241. Muéstrese que cada una de estas condiciones es necesaria y suficiente para que exista una circunferencia inscrita en el cuadrilátero $ABCD$ (véase también el problema I.19).

II.242. Muéstrese que cada una de estas condiciones es necesaria y suficiente para que exista una circunferencia que es tangente a las rectas AB, BC, CD y DA, cuyo centro se halla fuera del cuadrilátero $ABCD$.

II.243. Supongamos que $ABCD$ es un cuadrilátero circunscrito, O, el centro de la circunferencia inscrita, M_1, el punto medio de AC, M_2, el punto medio de BD, r, el radio de la circunferencia (las distancias desde O hasta los lados son iguales a r), x_1, y_1, z_1, u_1 son, respectivamente, las distancias desde M_1 hasta AB, BC, CD, DA; x_2, y_2, z_2, u_2 son, respecti-

vamente, las distancias desde M_2 hasta los mismos lados. Puesto que $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$, entonces $|AB|r - |BC|r + |CD|r - |DA|r = 0$. Además, $|AB|x_1 - |BC|y_1 + |CD|z_1 - |DA|u_1 = 0$, $|AB|x_2 - |BC|y_2 + |CD|z_2 - |DA|u_2 = 0$, pero precisamente esto significa que los puntos O, M_1, M_2 se hallan en una recta (véase la observación al problema II.22). Precisamente de la misma manera se examinan otros casos de disposición de los puntos A, B, C y D y del centro de la circunferencia. En este caso hay que hacer uso de las relaciones que surgen entre los segmentos $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$ (véase los problemas II.241, II.242) y, como se ha dicho en la observación del problema II.22, si cualesquiera dos puntos se encuentran dispuestos por diferentes lados de alguna recta, a las distancias correspondientes hay que atribuirles signos diferentes.

II.244. Designemos por L y P, respectivamente, los puntos de intersección de las rectas AM y AN con la circunferencia. Como se deduce del problema II.204, las rectas BL, DP y MN se cortan en un punto. Pero BL y DP son diámetros que se intersecan en el centro de la circunferencia, por consiguiente, MN pasa por el centro de la misma.

II.245. Aplíquese el teorema de Pascal (problema II.204).

II.246. Supongamos (fig. 44) que P es el punto de intersección de las diagonales y K, L, M, N son los pies de las perpendiculares bajadas desde P sobre AB, BC, CD y DA,

respectivamente. Puesto que $PKBL$ es un cuadrilátero inscrito, $\angle PKL = \angle PBC$; análogamente $\angle PKN = \angle PAD$; pero $\angle PBC = \angle PAD$, ya que éstos se apoyan sobre un

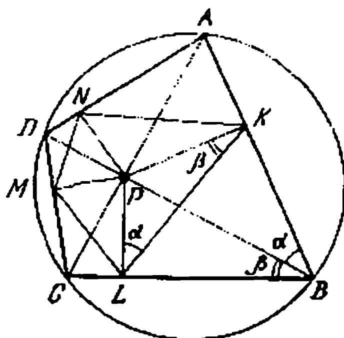


Fig. 44

mismo arco. Por consiguiente, KP es la bisectriz del ángulo NKL; por eso, las bisectrices de los ángulos del cuadrilátero $KLMN$ se cortan en el punto P que es precisamente el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero $KLMN$. Ahora supongamos que las diagonales AC y BD son mutuamente perpendiculares, R es el radio de la circunferencia dada, d, la distancia de P hasta su centro, $|AP| \times |PC| = R^2 - d^2$.

El radio de la circunferencia buscada r es igual, en particular, a la distancia desde P hasta KL. Al designar $\angle KLP = \angle ABP = \alpha$, $\angle PBC = \beta$, encontramos: $r = |PL| \times$ $\operatorname{sen}\alpha = |PB| \cdot \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha = |PB| \frac{|PC|}{|BC|} \times$ $\times \frac{|AP|}{|AB|} = (R^2 - d^2) \times \frac{|PB|\ |AC|}{|BC| \cdot |AB|\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \times$

$\times \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{|AC|} = (R^2 - d^2) \cdot \frac{2S_{ABC}}{2S_{ABC}} \cdot \frac{1}{2R} =$
$= \frac{R^2 - d^2}{2R}$. *Respuesta*: $\frac{R^2-d^2}{2R}$.

II.247. Supongamos (fig. 45) que $ABCD$ es el cuadrilátero dado, P es el punto de intersección de las diagonales, K es el punto medio

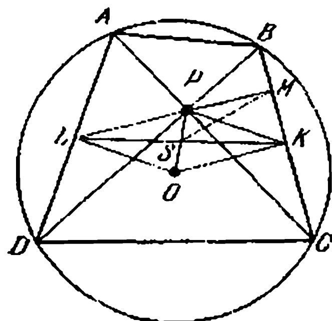


Fig. 45

de BC y L es el punto medio de AD. Demostremos que la recta LP es perpendicular a BC. Al designar por M el punto de intersección de LP con BC, obtendremos: $\angle BPM = \angle LPD = \angle ADP = \angle PCB$. Por consiguiente, $PM \perp BC$. Por lo tanto, $OK \parallel LP$. De manera análoga $PK \parallel LO$ y $KOLP$ es un paralelogramo, $|LK|^2 + |PO|^2 = 2(|LP|^2 + |PK|^2) = 2\left(\frac{|AD|^2}{4} + \frac{|BC|^2}{4}\right) = 2R^2$. (Si las cuerdas AD y BC se desplazan de manera que tengan un extremo común, y los arcos correspondientes prolonguen uno a otro, se formará un triángulo rectángulo con los catetos $|AD|$ y $|BC|$ y la hipotenusa igual a $2R$; por lo tanto, $|AD|^2 + |BC|^2 = 4R^2$.) Por conse-

cuencia, $|LK|^2 = 2R^2 - d^2$ y los puntos L y K se hallan en la circunferencia con el centro en S que es el punto medio de PO, y el radio igual a $1/2\sqrt{2R^2 - d^2}$. Pero el $\triangle LMK$ es rectángulo, MS es la mediana, $|MS| = \frac{1}{2}|LK| = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$, es decir, M se sitúa en la misma circunferencia. *Respuesta*: $^1/_2\sqrt{2R^2 - d^2}$.

II.248. De los dos problemas anteriores se deduce que si las diagonales del cuadrilátero inscrito son mutuamente perpendiculares, las proyecciones del punto de intersección de las diagonales de este cuadrilátero sobre sus lados sirven de vértices del cuadrilátero que puede inscribirse en la circunferencia, y alrededor del cual puede circunscribirse una circunferencia; además, los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita y la distancia entre sus centros se determinan por completo por el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del cuadrilátero inicial, y por la distancia desde su centro hasta el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero inscrito en aquélla. Por consiguiente, al girar las diagonales del cuadrilátero inicial alrededor del punto de su intersección, el cuadrilátero formado por las proyecciones de este punto, girará, permaneciendo inscrito en la misma circunferencia y circunscrito alrededor de la misma circunferencia. Es fácil mostrar también, tomando en consideración las expresiones para los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita obtenidas en dos pro-

blemas anteriores, que la relación, propuesta para demostrar, se cumple en caso de semejantes cuadriláteros.

Para concluir la demostración nos queda demostrar que cualquier cuadrilátero "inscrito-circunscrito" puede obtenerse a partir del cuadrilátero inscrito con diagonales mutuamente perpendiculares según el procedimiento indicado arriba. En efecto, si $KLMN$ es un cuadrilátero «inscrito-circunscrito», P es el centro de la circunferencia inscrita, al trazar las rectas perpendiculares a las bisectrices KP, LP, MP, NP, que pasan por K, L, M y N, respectivamente, obtenemos el cuadrilátero $ABCD$ (véase la fig. 44). Además, $\angle BPK = \angle KLB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle MLK$ (se usa, en particular, el hecho de que el cuadrilátero $PKBL$ tiene rectos los ángulos opuestos y, por consiguiente, es inscrito). De manera análoga, $\angle KPA = \angle KNA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle MNK$ y, por lo tanto, $\angle BPA = \angle BPK + \angle KPA = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle MLK + \angle MNK) = 90^\circ$. De esta manera, todos los ángulos BPA, APD, DPC y CPB son rectos, P es el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ y las diagonales mismas son mutuamente perpendiculares. No es difícil mostrar que $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito, puesto que

$$\angle ABC + \angle ADC = \angle PBL + \angle PBK + \angle PDN + \angle PDM = \angle PKL + \angle PLK +$$

$+ \angle PMN + \angle PNM = \frac{1}{2}(\angle NKL + \angle KLM + \angle LMN + \angle MNK) = 180°.$

Observación: véase también el problema II.319.

II.249. Los puntos medios de los lados del cuadrilátero forman un paralelogramo, cuyas diagonales son paralelas a los segmentos que unen los centros de masas de los triángulos opuestos. Otro paralelogramo lo forman las cuatro alturas de los triángulos examinados, que parten de los vértices del cuadrilátero. Los lados del primer paralelogramo son paralelos a las diagonales del cuadrilátero, mientras que los del segundo son perpendiculares a éstas. Además, los lados del segundo paralelogramo son ctg α veces mayores que los lados correspondientes del primero (α es el ángulo agudo comprendido entre las diagonales del cuadrilátero.)

II.250. Demostremos que ambas afirmaciones (BD es la bisectriz del ángulo ANC, AC, la bisectriz del ángulo BMD) son equivalentes a la igualdad $|AB|\cdot|CD| = |AD| \times |BC|$. Tomemos en el arco BAD el punto A_1 de manera que $|DA_1| = |AB|$. La condición del problema equivale a que la recta A_1C pasa por N que es el punto medio de BD, es decir, a la igualdad de las áreas de los triángulos DA_1C y A_1BC, de donde $|DA_1| \times |DC| = |BA_1|\cdot|BC|$, es decir, $|AB| \times |CD| = |AD|\cdot|BC|$.

II.251. La perpendicularidad de las bisectrices se demuestra sin dificultad. Demostre-

mos la segunda afirmación. Supongamos que M es el punto medio de AC y N, el punto medio de BD. De la semejanza de los triángulos AKC y BKD se deduce que $\angle MKA = \angle NKD$ y $\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{|AC|}{|BD|}$, es decir, la bisectriz del ángulo BKC es también la bisectriz del ángulo MKN y divide el segmento MN en la razón $\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{|AC|}{|BD|}$. Es evidente que en esta misma razón también la bisectriz del ángulo ALB divide MN.

II.252. Supongamos que $ABCD$ es el cuadrilátero dado, O es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, O_1 y O_2 son los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos DAB y BCD, K y L son, respectivamente, los puntos medios de los lados AB y BC. Los puntos O_1 y O_2 se hallan en OK y OL; además, $\frac{|OO_1|}{|O_1K|} = \frac{|OO_2|}{|O_2L|}$. Esto se deduce del hecho de que O_1O_2 es perpendicular a DB y, por consiguiente, O_1O_2 es paralela a LK (LK es paralela a AC). Por lo tanto, las rectas AO_1 y CO_2 dividen OB en una misma razón. (Apliquemos el teorema de Menelao que figura en el problema II.45, a los triángulos OKB y OLD.)

II.253. Designemos el radio de la circunferencia con R y las distancias desde P, Q y M hasta el centro, con a, b y c, respectivamente. Entonces (problema I.272) $|QP|^2 = a^2 + b^2 - 2R^2$, $|QM|^2 = b^2 + c^2 - 2R^2$, $|PM|^2 = c^2 + a^2 - 2R^2$. Si O es el centro de la circunferencia, para que QO sea perpen-

dicular a PM, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad (problema II.1) $|QP|^2 - |QM|^2 = |OP|^2 - |OM|^2$ o bien $(a^2 + b^2 - 2R^2) - (b^2 + c^2 - 2R^2) = a^2 - c^2$. De manera análoga se verifica la perpendicularidad de otros segmentos.

II.254. Si M, N, P y Q son, respectivamente, los puntos de tangencia de los lados AB, BC, CD y DA con la circunferencia, como se deduce de la resolución del problema I.236, MP y NQ se cortan en el punto de intersección de AC y BD. Precisamente de la misma manera demostramos que las rectas MN y PQ se intersecan en el mismo punto que las rectas AC y KL, mientras que las rectas MQ y NP, en el mismo punto que las rectas KL y BD. Ahora, para el cuadrilátero $MNPQ$ valgámonos del resultado del problema anterior.

II.255. Designemos: $\angle DAN = \angle MAB = \varphi$. Supongamos que L es el punto de intersección de AM y NB, P es el punto de intersección de AN y DM, Q es el punto de intersección de AK y MN. Según el teorema de Ceva (problema II.44), para el $\triangle AMN$ tenemos:

$$\frac{|NQ|}{|QM|} = \frac{|AL|}{|LM|}\cdot\frac{|NP|}{|PA|} = \frac{S_{NAB}}{S_{NMB}}\cdot\frac{S_{DNM}}{S_{DAM}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}|AN|\cdot\frac{|AM|}{\cos\varphi}\,\text{sen}\,\angle NAB\cdot\frac{1}{2}|AN|\cdot|NM|\times \times\,\text{tg}\,\varphi\cos\angle ANM}{\frac{1}{2}|AM|\cdot|NM|\,\text{tg}\,\varphi\cos\angle AMN\cdot\frac{1}{2}\times \times\frac{|AN|}{\cos\varphi}\cdot|AM|\,\text{sen}\,\angle MAD} =$$

$$= \frac{|AN|\cos\angle ANM}{|AM|\cos\angle AMN},$$

es decir, Q divide NM en la misma razón que la altura bajada desde A sobre NM.

II.257. Demuéstrese al principio la afirmación auxiliar siguiente: si A, B, C son puntos en una recta, M, un punto arbitrario del plano, los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos MAC, MBC, MCA y el punto M se hallan en una circunferencia. Luego hágase uso del resultado del problema II.256.

II.258. Designemos los puntos de intersección de las rectas por A, B, C, D, P, Q (los puntos se disponen de la misma manera que en la solución del problema I.271); O es el centro de la circunferencia que pasa por A, B, C y D; R es su radio; a y b son las tangentes trazadas hacia la circunferencia desde P y Q, respectivamente. El hecho de que M se halla en PQ se ha demostrado al solucionar el problema I.271. Además, también se ha demostrado que $|PM|\cdot|PQ| = a^2$, $|QM| \times \times |QP| = b^2$, $|QP|^2 = \sqrt{a^2+b^2}$. De tal manera, $|PM| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|QM| = = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Además, $|PO| = \sqrt{a^2-R^2}$, $|QO| = \sqrt{b^2-R^2}$. Por consiguiente, $|PO|^2 - - |QO|^2 = a^2 - b^2 = |PM|^2 - |QM|^2$. Pero esto significa que $OM \perp PQ$. Para concluir la demostración hace falta examinar el caso en que (con las mismas designaciones) en la circunferencia están situados los puntos A, C, P y Q (véase también el problema II.253 y su solución).

11.259. Si una recta se desplaza paralelamente a sí misma, la recta de Euler del triángulo, uno de cuyos lados es la recta que se mueve, se desplazará paralelamente a sí misma. Tomándolo en consideración, es fácil reducir el problema al siguiente. Sea que A, C y D son tres puntos en una recta; B, un

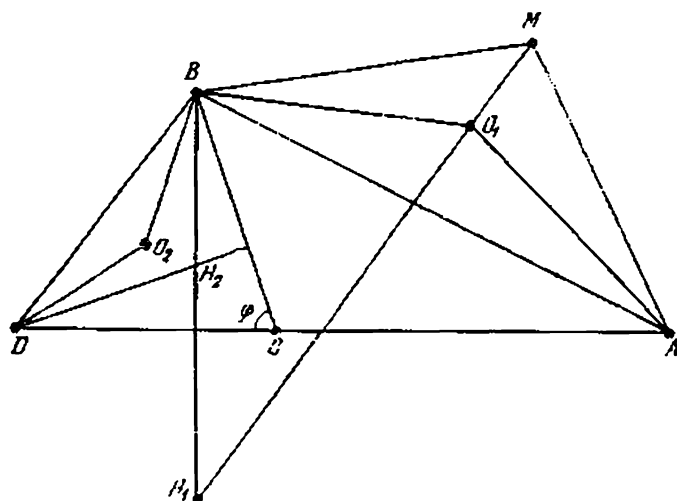


Fig. 46

punto arbitrario del plano. Si la recta de Euler del triángulo ABC es paralela a BD, la recta de Euler en el triángulo CBD es paralela a AB (fig. 46). Demostrémoslo. Designemos: $\angle BCD = \varphi$ (supongamos que C se halla entre A y D, $\varphi \leqslant 90°$), O_1 y H_1 son el centro de la circunferencia circunscrita y el punto de intersección de las alturas del $\triangle ABC$, O_2 y H_2 son sus homólogos en el $\triangle BCD$. Circunscribamos alrededor de ABH_1 una circunferencia, M es su punto de intersección con

O_1H_1. Demostremos que los cuadriláteros O_1AMB y O_2DH_2B son semejantes. En primer lugar, los triángulos O_1AB y O_2DB son triángulos isósceles semejantes y $\angle MAB = \angle MH_1B = \angle H_1BD = \angle H_2BD$ (BD es paralela a O_1H_1), $\angle MBA = \angle MH_1A = \angle H_2DB$ (AH_1 y DH_2 son perpendiculares a CB). La semejanza de los cuadriláteros está demostrada. Luego: $\angle O_2H_2B = \angle O_1MA = \angle H_1MA = \angle H_1BA = \angle H_2BA$, es decir, H_2O_2 es paralela a AB.

II.260. Del resultado del problema II.19 se deduce que la cuerda común de las circunferencias con diámetros AE y DC (así como DC y BF, BF y AE) contiene los puntos de intersección de las alturas de los triángulos ABC, BDE, DAF y CEF. Supongamos también que K es el punto de intersección de AE y DC, L es el punto de intersección de AE y BF. Según el teorema de Menelao (problema II.45), para los triángulos BEA y EAC tenemos: $\frac{|AK|}{|KE|} \cdot \frac{|EC|}{|CB|} \cdot \frac{|BD|}{|DA|} = 1$, $\frac{|AL|}{|LE|} \times \frac{|EB|}{|BC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = 1$. Al dividir estas igualdades término a término una por otra y tomando en consideración que $\frac{|CE|}{|EB|} \cdot \frac{|BD|}{|DA|} \times \frac{|AF|}{|FC|} = 1$, obtenemos: $\frac{|AK|}{|AL|} = \frac{|KE|}{|LE|}$. Examinemos la circunferencia con diámetro AE. Para todos los puntos P de esta circunferencia la razón $\frac{|PK|}{|PL|}$ es constante (véase el problema II.9). Lo mismo es cierto también para las circunferencias con diámetros DC

y BF. De esta manera, las tres circunferencias se intersecan en dos puntos P_1 y P_2 tales que las razones entre las distancias desde P_1 y P_2 hasta K, L y M son iguales para ellas. Ahora se puede aprovechar el resultado del problema II.14.

II.261. La afirmación se deduce del resultado del problema anterior.

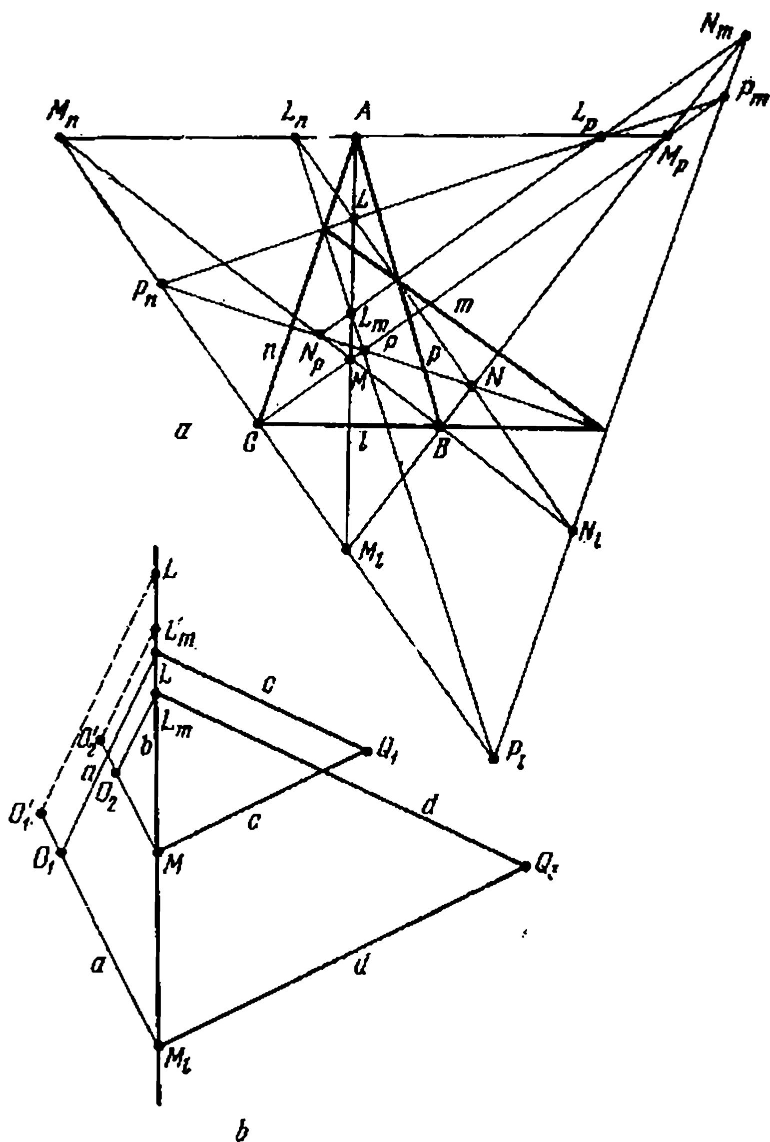
II.262. Designemos con $l\,(ABC)$ la mediatriz trazada hacia el segmento que une el punto de intersección de las alturas y el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC. Supongamos que la recta interseca las rectas BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. Demostremos al principio que durante el desplazamiento de la recta DEF paralelamente a sí misma, el punto M de intersección de las rectas $l\,(DFB)$ y $l\,(DEC)$ describe una línea recta. Sea que los puntos D_1, E_1, F_1; D_2, E_2, F_2; D_3, E_3, F_3 corresponden a las tres posiciones de esta recta. Las rectas $l\,(D_iF_iB)$ y $l\,(D_iE_iC)$, donde $i = 1, 2, 3$, se intersecan en M_i y cortan la recta BC en los puntos N_i y K_i. Es fácil ver que el punto N_2 divide el segmento N_1N_3 en la misma razón que el punto K_2 divide el segmento K_1K_3. Esta razón es igual a la razón en que D_2 divide D_1D_3 (en la misma razón E_2 divide E_1E_3 y F_2, F_1F_3). Como las rectas $l\,(D_iF_iB)$ son paralelas entre sí y las rectas $l\,(D_iE_iC)$ lo son también, la recta $l\,(D_2F_2B)$ divide el segmento M_1M_3 en la misma razón que la recta $l\,(D_2E_2C)$, es decir, M_2 se halla en el segmento M_1M_3.

Mostremos ahora que el punto M describe

la recta $l\,(ABC)$. Para esto es suficiente demostrar que para dos posiciones de la recta DEF el punto correspondiente M se halla en $l\,(ABC)$. Examinemos el caso en que esta recta pasa por A (los puntos E y F coinciden con A). Introduzcamos el sistema de coordenadas, en el cual los puntos A, B, C y D tienen coordenadas $A\,(0,\,a)$, $B\,(b,\,0)$, $C\,(c,\,0)$, $D\,(d,\,0)$. Encontremos la ecuación de la recta $l\,(ABC)$. El punto de intersección de las alturas del triángulo ABC tiene las coordenadas $\left(0,\,-\frac{bc}{a}\right)$, el centro del círculo circunscrito, $\left(\frac{b+c}{2},\ \frac{1}{2}\left(a+\frac{bc}{a}\right)\right)$. Escribamos la ecuación de la recta $l\,(ABC)$: $x\,(b+c)+y\left(a+\frac{3bc}{a}\right)=$ $=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}+bc-\frac{3b^2c^2}{4a^2}$. Sustituyendo en esta ecuación c por d obtenemos la ecuación de la recta $l\,(ABD)$ y sustituyendo b por d, la ecuación de la recta $l\,(ACD)$.

Se puede comprobar que las tres rectas tienen un punto común $Q\,(x_0,\ y_0)$, donde $x_0=\frac{1}{4}(b+c+d)-\frac{3bcd}{4a^2}$, $y_0=\frac{1}{4a}\times$ $\times\,(a^2-bc-cd-db)$. Con esto se concluye la demostración, puesto que el caso, en que la recta DEF pasa por B y C, equivale al examinado.

II.263. Sean l, m, n y p las rectas que forman nuestros triángulos (fig. 47, *a*). Introduzcamos las designaciones siguientes: P es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo formado por las rectas l, m y n;



N_m
P_m
M_n
L_n
A
L_p
M_p
L
P_n
m
L_m
n
N_p
p
p
M
N
a
C
l
B
M_l
N_l
L
L'_m
L
c
L_m
O''_2
b
Q_1
P_l
n
O_2
d
O'_1
c
O_1
M
Q_2
a
d
M_l
b

Fig. 47

L	N	M_l	P_n	O_1
M	P	L_m	N_p	O_2
P_m	M_p	N_m	L_p	O_3
N_l	L_n	P_l	M_n	O_4
Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	

P_l es el centro de la circunferencia exinscrita del mismo triángulo, la cual es tangente al lado que yace en la recta l. El mismo sentido lo tendrán las designaciones L, M_p, N_m, etc.

En la tabla aducida, los cuatro puntos dispuestos en una línea o en una columna se hallan en una circunferencia; además, los centros de las circunferencias que corresponden a las líneas, se sitúan en una recta: q_1, mientras que los centros, que corresponden a las columnas, en otra: q_2; q_1 y q_2 son perpendiculares y se intersecan en el punto de Michell (problema II.256). Demostrémoslo. El hecho de que las cuaternas indicadas se hallan en una circunferencia se demuestra sin dificultad. Designemos por O_i, Q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) los centros de las circunferencias correspondientes. Demostremos que O_1O_2 es perpendicular a Q_1Q_3 y Q_2Q_4. Si en el triángulo (l, n, m) el ángulo entre l y m es igual a α, entonces $\angle LNM_l =$

$= \angle L_mPM = 90° + \frac{\alpha}{2}$; por consiguiente, $\angle LO_1M_l = \angle L_mO_2M = 180° - \alpha$. Precisamente de la misma manera $\angle LP_mM = \angle L_mP_lM_l = \alpha/2$, $\angle LQ_1M = \angle L_mQ_3M_l = \alpha$. Los triángulos LO_1M_l, L_mO_2M, LQ_1M, $L_mO_3M_l$ son isósceles, sus lados son respectivamente perpendiculares (por ejemplo, O_1L y LQ_1). Luego (fig. 47, *b*) $|Q_1O_1|^2 - |O_1Q_3|^2 = (a^2 + c^2) - (a^2 + d^2) = (b^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = |O_2Q_1|^2 - |O_2Q_3|^2$. Por consiguiente, O_1O_2 y Q_1Q_3 son perpendiculares. Precisamente de la misma manera demostramos la perpendicularidad de O_1O_2 y Q_2Q_4 (examinemos la recta, en la cual están dispuestos los puntos N, P, N_p, P_n). Por eso Q_1Q_3 y Q_2Q_4 son paralelos (si estos puntos no se hallan en una recta). Igualmente serán paralelos Q_1Q_4 y Q_3Q_2 (son perpendiculares a O_1O_3), Q_1Q_2 y Q_3Q_4 (son perpendiculares a O_1O_4); pero de esto se deduce que Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 se hallan en una recta: q_2; también O_1, O_2, O_3, O_4 se sitúan en una recta: q_1. Es evidente que q_1 y q_2 son perpendiculares.

Desplacemos la recta m paralelamente a sí misma. Sea que L', L'_m, O'_1, O'_2 corresponden a la recta m'. La razón $\frac{|O_1O'_1|}{|O_2O'_2|} = \frac{|LL'|}{|L_mL'_m|}$ es constante $\left(\text{es igual a } \frac{|AL|}{|AL_m|}\right)$ y esto significa que durante el desplazamiento de m la recta O_1O_2, es decir, q_1, pasa por un punto fijo. Precisamente de la misma manera pasa por un punto fijo la recta q_2. Puesto que q_1 y q_2 son perpendiculares, su punto de inter-

sección describe una circunferencia. Pero cuando m pasa por A (así como por B o C), entonces los puntos L y L_m se unen con A, las rectas O_1O_2 y Q_1Q_3, es decir, q_1 y q_2 pasan por A (respectivamente, por B o C). De tal modo, el punto de intersección de q_1 y q_2 recorre la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC. Desplazando otras rectas, o sea l, n, p, demostremos que el punto de intersección de q_1 y q_2 pertenece a cualquier circunferencia circunscrita alrededor de uno de los triángulos formado por las rectas l, m, n, p, es decir, las rectas q_1 y q_2 se cortan en el punto de intersección de las circunferencias circunscritas alrededor de estos triángulos, o sea, en el punto de Michell.

Notemos que «de paso» hemos demostrado que las cuatro circunferencias circunscritas alrededor de cuatro triángulos formados por cuatro rectas del plano, se intersecan en un punto (problema II.256).

II.266. Designemos por C uno de los puntos de intersección, por el cual pasa la recta. Supongamos que B_1, B_2, B_3 son los pies de las perpendiculares bajadas desde O_1, O_2, O_3, respectivamente, sobre la recta, y K y M son los puntos de intersección de las rectas paralelas a A_1A_2, que pasan por O_1 y O_2, con O_2B_2 y O_3B_3, respectivamente. Puesto que B_1 y B_2 son los puntos medios de las cuerdas A_1C y CA_2, entonces $|B_1B_2| = |A_1A_2|/2$. Si α es el ángulo entre las rectas A_1A_3 y O_1O_3, entonces $\frac{|A_1A_2|}{|O_1O_2|} = \frac{2\,|B_1B_2|}{|O_1O_2|} = 2\,\frac{|O_1K|}{|O_1O_2|} = 2\cos\alpha$; análogamente $\frac{|A_2A_3|}{|O_2O_3|} = 2\cos\alpha$.

II.268. Supongamos que O_1 y O_2 son centros de circunferencias, R_1 y R_2, sus radios, $|O_1O_2| = a$, M es el punto de intersección de las tangentes interiores comunes. La circunferencia con diámetro O_1O_2 pasa por los puntos, en los que las tangentes exteriores comunes se intersecan con las tangentes interiores comunes. Para la homotecia con el centro en el punto M y la razón $\frac{a-R_1-R_2}{a}$, esta circunferencia pasa a la circunferencia con el centro en O_1O_2, la cual es tangente a las dadas por el extrerior.

II.269. Sea M uno de los puntos de intersección de las circunferencias; entonces MA y MC son las bisectrices del ángulo M (exterior e interior) del triángulo BMD, puesto que la circunferencia con el diámetro AC es el lugar geométrico de los puntos M, para los cuales $\frac{|MA|}{|MC|} = \frac{|MB|}{|MD|}$ (véase el problema II.9). Valiéndose de las correlaciones entre los ángulos del $\triangle AMC$ rectángulo y del $\triangle BMD$, cerciórese de que los radios de las circunferencias circunscritas alrededor de estos triángulos, trazados desde el vértice M, son mutuamente perpendiculares.

II.271. Notemos (fig. 48, a) que el $\triangle APM$ es semejante al $\triangle AMQ$, el $\triangle APL$ es semejante al $\triangle AKQ$, el $\triangle AKN$ es semejante al $\triangle ALN$; a partir de estas semejanzas obtenemos: $\frac{|PM|}{|MQ|} = \frac{|AM|}{|AQ|}$, $\frac{|QK|}{|PL|} = \frac{|AQ|}{|AL|}$, $\frac{|LN|}{|NK|} = \frac{|AL|}{|AN|}$. Multiplicando estas igualdades y tomando en consideración que $|AM| =$

$|AN|$, obtenemos que $\frac{|PM|}{|MQ|}\cdot\frac{|QK|}{|PL|}\cdot\frac{|LN|}{|NK|}=$ $=1$, pero esto (véase el problema II.49) es precisamente la condición necesaria y suficiente para que las rectas MN, PK y QL se intersequen en un punto.

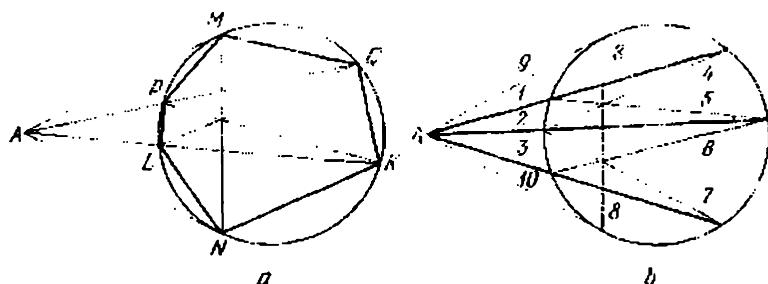


Fig. 48

El procedimiento de construcción de la tangente con ayuda de una regla se comprende al examinar la fig. 48, *b*. Los números 1, 2, . . . muestran la sucesión en que se trazan las rectas.

II.272. El conjunto buscado es una recta, o sea la polar de un punto respecto a la circunferencia dada (véase el problema II.21).

II.273. Los ángulos AMN y BMN pueden expresarse a través del ángulo central que corresponde al arco AB de la circunferencia dada (hay que analizar diferentes casos de posición del punto N); después de esto se puede determinar $\angle AMB$. El lugar geométrico de puntos buscado es una circunferencia.

II.274. Aprovéchense los resultados de los problemas II.271 y II.21. El lugar geométrico de puntos obtenido coincide con el lugar geo-

métrico de puntos del problema II.21, es decir, es la polar del punto A respecto a la circunferencia dada.

II.275. Designemos (fig. 49) por O el punto de intersección de AM y DC. Tracemos por el punto B una tangente a la segunda circunferencia y designemos por K el punto de intersección de aquélla con AC (de la misma manera que en la condición). Es evidente que

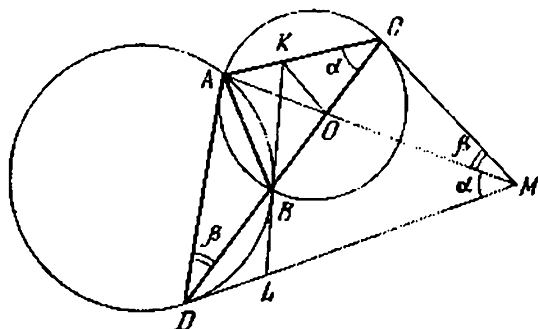


Fig. 49

la afirmación del problema es equivalente a la afirmación de que $KO \parallel CM$. Supongamos que el ángulo apoyado sobre el arco AB en la primera circunferencia, es igual a α; en la segunda, a β; entonces, $\angle BCM = \angle BAC$, $\angle BDM = \angle BAD$, $\angle DMC = 180° - \angle BDM - \angle BCM = 180° - \angle BAD - \angle BAC = 180° - \angle DAC$; por consiguiente, $ADMC$ es un cuadrilátero inscrito, $\angle AMC = \beta$. Además, si la tangente BK corta DM en el punto L, entonces $\angle KBO = \angle LBD = \angle BDL = \angle CAM$; por consiguiente, el cuadrilátero $KABO$ también es inscrito y $\angle KOA =$

$= \angle KBA - \beta$, es decir, $KO \parallel CM$ (precisamente de la misma manera se examinan los casos de otras posiciones mutuas de los puntos D, B y C).

II.276. Puesto que la circunferencia con el diámetro CD pasa por el punto fijo A señalado en MN ($MN \perp CD$), entonces

$$|CN| \cdot |ND| = |NA|^2 \qquad (1)$$

es una magnitud constante. Designemos por K el punto de intersección de PQ con MN. Mostremos que $\frac{|MK|}{|KN|}$ es una magnitud constante. Notemos que $\angle PNQ = 180° - \angle PMQ$ por consiguiente, $\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{S_{PMQ}}{S_{PQN}} = \frac{|PM| \cdot |MQ|}{|PN| \cdot |NQ|} = \frac{|MN|}{|CN|} \cdot \frac{|MN|}{|ND|} = \frac{|MN|^2}{|AN|^2}$ (se ha empleado la igualdad (1) y el hecho de que el $\triangle MNP$ es semejante al $\triangle MNC$ y el $\triangle MNQ$ es semejante al $\triangle MND$).

II.277. La igualdad $\angle O_1AO_2 = \angle MAN$ se deduce el resultado del problema I.279, la igualdad $\angle O_1AO_2 = 2\angle CAE$ fue demostrada al resolver el problema I.275.

II.278. Sea que O y O_1 son los centros de dos circunferencias examinadas (O es el punto medio de AB), K es el punto de tangencia de las circunferencias (K se halla en la recta OO_1), N es el punto de tangencia de la circunferencia O_1 con la recta CD, M es el punto de intersección de AB y CD. Puesto que O_1N es paralela a AB y los triángulos KO_1N y KOA son isósceles y semejantes, los puntos K, N y A se sitúan en una recta. Designemos

por t la tangente a la circunferencia O_1 trazada a partir del punto A (suponemos que la circunferencia O_1 es interior al segmento CBD). Tenemos: $t^2 = |AN|\cdot|AK| = |AN|^2 + |AN|\cdot|NK| = |AM|^2 + |MN|^2 + |CN|\cdot|ND| = |AM|^2 + |MN|^2 + (|CM| - |MN|)(|CM| + |MN|) = |AM|^2 + |CM|^2 = |AK|^2$, lo que había que demostrar.

II.279. Supongamos que A es el punto medio del arco de la circunferencia dada que no forma parte del segmento; las tangentes a las circunferencias inscritas en el segmento, que parten de A, son iguales (problema II.278). De esto se deduce que A se halla en la recta MN, puesto que $|AO_1|^2 - |AO_2|^2 = |O_1M|^2 - |O_2M|^2$, donde O_1 y O_2 son los centros de las circunferencias.

II.280. Examinemos el caso general de circunferencias arbitrarias. Sea que los puntos F y F' están dispuestos como se muestra en la fig. 50. Las designaciones se comprenden al examinar el dibujo. Demostremos que existe una circunferencia inscrita en el cuadrilátero $AKBM$, después de lo cual valgámonos del resultado del problema II.55. Para esto es suficiente demostrar que (véase los problemas II.241, II.242)

$$|BF| + |BF'| = |AF'| + |AF|. \quad (1)$$

Tomando en consideración que $|BL| = |BT|$ y $|FS| = |FT|$, obtenemos: $|BF| = |BL| - |FS|$, y de manera análoga $|FA| = |FQ| - |AE|$, $|BF'| = |F'P| - |BL|$, $|F'A| = |AE| -$

$- \mid F'R \mid$. Colocando estas expresiones en (1), obtenemos: $\mid BL \mid - \mid FS \mid + \mid F'P \mid - \mid BL \mid = \mid AE \mid - \mid F'R \mid + \mid FQ \mid - \mid AE \mid \Rightarrow \mid F'R \mid + \mid F'P \mid = \mid FQ \mid + \mid FS \mid \Rightarrow \mid PR \mid = \mid SQ \mid$. Precisamente de

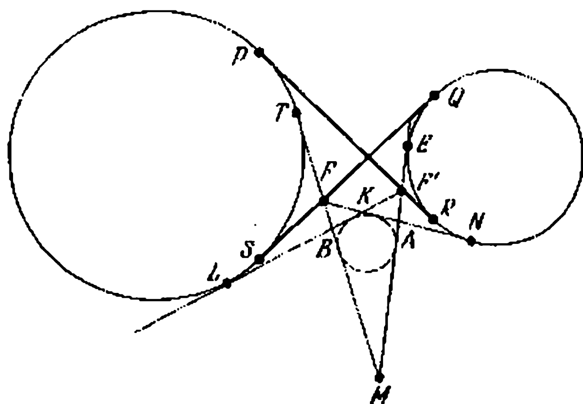


Fig. 50

la misma manera se analizan los demás casos de disposición de los puntos F y F' en las tangentes (además, se toman en consideración los resultados de los problemas II.241, II.242). Puesto que los puntos de tangencia y el punto de intersección dividen cada tangente en 4 partes, tales casos serán $\frac{1}{2}\cdot 4^2 = 8$.

Para demostrar la segunda parte notemos que los puntos medios de AB, FF' y el centro de la tercera circunferencia O_3 inscrita en $AKBM$ se hallan en una recta (véase el problema II.243). Pero, puesto que los radios de las circunferencias dadas son iguales, AB es paralela a O_1O_2 (O_1, O_2 son los centros de las circunferencias dadas); A y B se hallan en las

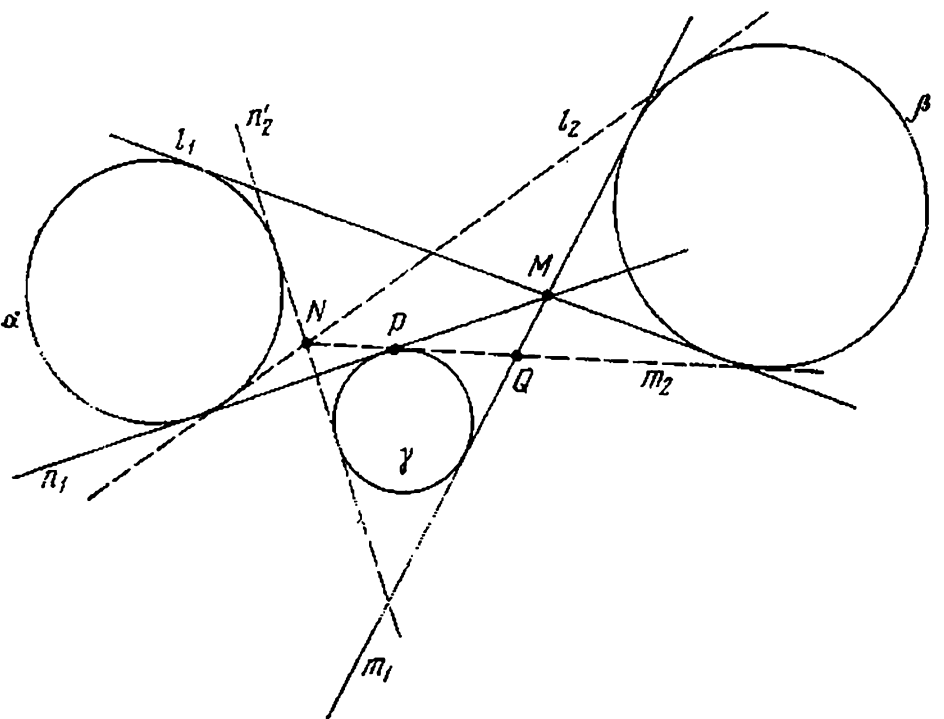


Fig. 51

rectas O_1O_3 y O_2O_3. Por consiguiente, la recta que pasa por O_3 y el punto medio de AB, divide O_1O_2 por la mitad.

II.281. Sea (fig. 51) M el punto de intersección de las tangentes l_1, m_1 y n_1; N, el punto de intersección de l_2 y m_2. Tracemos por N la recta n_2' tangente a α y distinta de l_2. De la misma manera como esto se hizo en el problema II.280, se puede demostrar que las rectas m_1, n_1, m_2 y n_2' son tangentes a una circunferencia; además, esta circunferencia es exinscrita respecto al triángulo PMQ (es tangente al lado PQ), es decir, coincide con γ. *Observación*. La fig. 51 corresponde al caso general de disposición de las circunferencias que satisfacen la condición del problema.

II.282. Demostremos que la recta D_1C pasa por O que es el centro del arco AB, mien-

Fig. 52

tras que la recta DC_1, por O_1 que es el centro del arco AB_1 (fig. 52). El triángulo DAD_1 es regular, $|DC| = |AC|$, por consiguiente,

$D_1C \perp DA$ y D_1C pasa por O. De manera análoga, $DC_1 \perp D_1A$. El punto O_1 se halla en el arco AB, puesto que aquél se obtiene a partir de O, girando alrededor de A en $\pi/3$. Sea que ambos arcos miden 6α (para mayor comodidad, $\alpha > \pi/6$). Entonces, $\angle AO_1C_1 = 2\alpha$, $\angle O_1C_1A = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle FAC_1 = 2\alpha$. Por consiguiente, $\angle AFC_1 = \pi - 2\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha = \angle FC_1A$, es decir, $|AF| = |AC_1| = |AC|$. Demostremos que los triángulos FAC y EDC son iguales. Tenemos: $|AF| = |AC| = |DC| = |DE|$, $\angle CDE = \angle CDB - \angle BDE = \pi - 2\alpha - (\pi - 2\angle DBE) = -2\alpha + 2\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 2\alpha - \frac{\pi}{3} = \angle FAC$; de tal manera, $|FC| = |CE|$. Luego encontramos: $\angle DCE = \frac{2\pi}{3} - \alpha$, $\angle B_1FD = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (vale la semisuma de los arcos correspondientes), $\angle B_1FC = \pi - \angle CFA = \frac{\pi}{3} + \alpha$, $\angle DFC = \frac{5}{6}\pi$, $\angle DCF = \pi - \frac{5}{6}\pi - \alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \alpha$ y, por fin, $\angle FCE = \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\pi}{3}$.

II.283. Examinemos dos casos: 1) el $\triangle ABC$ está circunscrito alrededor de la circunferencia dada; 2) la circunferencia dada es tangente a las prolongaciones de los lados AB y AC.

En el primer caso examinemos la circunferencia tangente a los lados del ángulo en los

puntos M y N y a la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$ por el interior. Supongamos que a, b, c son los lados del triángulo ABC, r es el radio de la circunferencia dada, $\angle A = \alpha$, $|AM| = |AN| = x$. Hagamos uso del teorema generalizado de Tolomeo (problema II.239): $xa = (b - x) \times c + (c - x) b$, de donde $x = \frac{2bc}{a+b+c} = \frac{4S_{ABC}}{(a+b+c)\operatorname{sen}\alpha} = \frac{2r}{\operatorname{sen}\alpha}$, es decir, x es constante. (Se puede demostrar que MN pasa por el centro de la circunferencia dada.)

En el segundo caso la circunferencia es tangente a los lados del ángulo y a la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$ por el exterior.

II.284. Designemos los lados del $\triangle ABC$ como lo hacemos de ordinario: a, b, c; sea que $|BD| = d$, $|AD| = b_1$, $|AM| = x$. Valgámonos del teorema generalizado de Tolomeo (problema II.239): $xa + (d - b_1 + x) b = (b - x) c$, de donde

$$x = \frac{b(c + b_1 - d)}{a+b+c}. \qquad (1)$$

Tomemos en AB el punto N de tal manera que MN sea paralela a BD. Tenemos:

$$|MN| = \frac{x}{b_1} d, \quad |AN| = \frac{x}{b_1} c,$$

$$S_{AMN} = \left(\frac{x}{b_1}\right)^2 S_{ABD} = \left(\frac{x}{b_1}\right)^2 \frac{b_1}{b} S_{ABC} =$$

$$= \frac{x^2}{b_1 b} S_{ABC}. \qquad (2)$$

Sea r el radio de la circunferencia tangente a MN, así como a las prolongaciones de AN y AM. Entonces de (1) y (2) se deduce, que

$$r = \frac{2S_{AMN}}{|AM|+|AN|-|MN|} = \frac{2x^2 S_{ABC}}{bx(b_1+c-d)} = \frac{2S_{ABC}}{a+b+c},$$

es decir, r es igual al radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$, lo que se necesitaba.

II.285. Designemos por M y K los puntos de tangencia de las circunferencias, cuyos

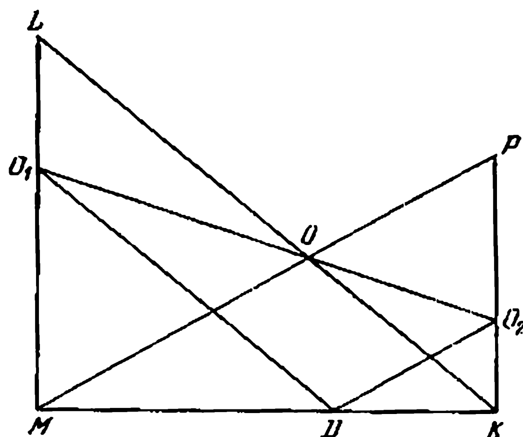


Fig. 53

centros son O_1 y O_2, con AC. Del resultado del problema anterior se deduce que $\angle O_1DM = \angle OKD = \frac{\varphi}{2}$, $\angle O_2DK = \angle OMD = 90° - \frac{\varphi}{2}$. Prolonguemos OK y OM hasta que se intersequen con O_1M y O_2K en los puntos L y P, respectivamente (fig. 53). En el trape-

cio $LMKP$ con las bases LM y PK tenemos $\frac{|MO_1|}{|O_1L|} = \frac{|MD|}{|DK|} = \frac{|PO_2|}{|O_2K|}$. Por consiguiente, O_1O_2 pasa por el punto de intersección de las diagonales del trapecio, o sea el punto O. Además,

$$\frac{|O_1O|}{|OO_2|} = \frac{|LM|}{|PK|} = \frac{|MK| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{|MK| \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

II.286. La afirmación del problema se deduce de los resultados de los problemas II.285 y II.232.

II.287. La afirmación de este problema puede demostrarse con ayuda del resultado del problema II.240, a ser más exacto, de su caso particular, cuando tres circunferencias tienen el radio cero, o sea son puntos. En el caso dado, lo serán los puntos medios de los lados del triángulo.

II.288. La afirmación de este problema se deduce del teorema de Feuerbach (véase el problema II.287) y del hecho de que los triángulos ABC, AHB, BHC, CHA tienen una misma circunferencia de los nueve puntos (demuéstrese).

II.289. Supongamos que en el $\triangle ABC$, para concretar, $a \leqslant b \leqslant c$. Designemos por A_1, B_1, C_1 los puntos medios de los lados BC, CA, AB y por F, F_a, F_b, F_c los puntos de tangencia de las circunferencias inscrita y exinscrita con la circunferencia de los nueve puntos del $\triangle ABC$. Hay que demostrar que en el hexágono $C_1F_cFA_1F_aF_b$ (los puntos toma-

dos en el orden indicado, forman un hexágono, puesto que $a \leqslant b \leqslant c$) las diagonales C_1A_1, F_cF_a y FF_a se cortan en un punto; para esto es suficiente demostrar (véase el problema II.49), que

$$|C_1F_c| \cdot |FA_1| \cdot |F_aF_b| = |F_cF| \cdot |A_1F_a| \times \times |F_bC_1|. \qquad (1)$$

Aplicando las fórmulas obtenidas en el problema I.201, encontramos:

$$|C_1F_c| = \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{R}{R+2r_c}}, \quad |FA_1| = = \frac{c-b}{2}\sqrt{\frac{R}{R-2r}},$$

$$|F_aF_b| = \frac{(a+b)R}{\sqrt{R+2r_a}\cdot\sqrt{R+2r_b}},$$

$$|F_cF| = \frac{(b-a)R}{\sqrt{R-2r}\cdot\sqrt{R+2r_c}},$$

$$|A_1F_a| = \frac{c-b}{2}\sqrt{\frac{R}{R+2r_a}},$$

$$|F_bC_1| = \frac{a+b}{2}\sqrt{\frac{R}{R+2r_b}}.$$

Después de esto la igualdad (1) se comprueba fácilmente. *Observación.* Se puede demostrar que los puntos de intersección de los lados opuestos del cuadrilátero, cuyos vértices son los puntos de tangencia de las circunferencias inscrita y exinscrita del triángulo dado con su circunferencia de los nueve puntos, se hallan en las prolongaciones de las líneas medias de este triángulo.

II.290. Aprovechando las fórmulas de los problemas II.193, II.194, II.289 (en el último problema véase su solución), encontramos $\frac{|F_bF_c|}{|B_1C_1|} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)R^3}{abc\,|OI_a|\cdot|OI_b|\cdot|OI_c|}$. Semejantes serán las relaciones de los demás lados correspondientes de los triángulos $F_aF_bF_c$ y $A_1B_1C_1$. Precisamente del mismo modo se demuestra la semejanza de otros pares de triángulos. Al mismo tiempo, para las magnitudes $|A_1B_2|$, etc. hace falta obtener fórmulas análogas a la fórmula del problema II.194.

II.291. Demuéstrese que $\triangle ABP = \triangle ACQ$. Para esto es suficiente demostrar que $\triangle KBP = \triangle ABC$ y $\triangle FCQ = \triangle ABC$ (por dos lados y el ángulo comprendido entre éstos): $\angle QAP = \angle CAB + \angle CAQ + \angle BAP = \angle CAB + \angle CAQ + \angle CQA = \angle CAB + 180° - \angle QCA = \angle CAB + 90° - \angle QCF = 90°$ (en virtud del supuesto de que $\angle CAB \leqslant 90°$; en caso de $\angle CAB > 90°$ los razonamientos son análogos).

II.292. Puesto que $\angle FE_1E = \angle FCE = 90°$, el cuadrilátero FE_1EC es inscrito, $\angle FCE_1 = \angle FEE_1 = 60°$. De manera análoga, es inscrito el cuadrilátero FE_1AD y $\angle E_1DF = \angle E_1AF = 60°$, es decir, el $\triangle DE_1C$ es regular. De este mismo modo se demuestra que el $\triangle BF_1C$ lo es también.

II.293. Designemos por P, Q y R los puntos de intersección de LB y AC, AN y BC, LB y AN, respectivamente. Sea que $|BC| = a$, $|AC| = b$. Es suficiente mostrar que $S_{ACQ} = S_{APB}$ (ambas áreas se diferencian de las examinadas por la adición del área del

$\triangle APR$). De la semejanza de los triángulos correspondientes obtenemos $|CQ| = |PC| \cdot \frac{ab}{a+b}$. Por consiguiente, $S_{ACQ} = \frac{1}{2}|AC||CQ| = \frac{ab^2}{2(a+b)}$, $S_{APB} = S_{ACB} - S_{PCB} - \frac{1}{2}ab - \frac{a^2b}{2(a+b)} = \frac{ab^2}{2(a+b)}$.

II.295. Demuéstrese que el área del triángulo con los vértices en los centros de los cuadrados, construidos sobre los lados del triángulo dado y dispuestos fuera de éste, y el área del triángulo con los vértices ubicados en los centros de los cuadrados, construidos en los mismos lados en el interior del triángulo dado son iguales a $S + \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2)$ y $\left| S - \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2) \right|$, respectivamente, donde a, b, c, S son los lados y el área del triángulo dado.

II.296. Designemos: $A_1BC = \alpha$, $\angle A_1CB = \beta$; entonces AA_1 divide BC en razón igual a
$$\frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}} = \frac{\frac{1}{2}|AB| \cdot |BA_1| \operatorname{sen}(\angle B + \alpha)}{\frac{1}{2}|AC| \cdot |CA_1| \operatorname{sen}(\angle C + \beta)} = \frac{c}{b} \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} \frac{\operatorname{sen}(\angle B + \alpha)}{\operatorname{sen}(\angle C + \beta)}.$$
Después de hacer los mismos cálculos para otros lados del triángulo ABC, hágase uso del teorema de Ceva (problema II.44).

II.297. Sea que KL es el arco de la circunferencia que se encuentra en el interior del triángulo ABC. Al prolongar los lados AB y BC más allá del punto B, obtenemos el arco

MN simétrico al arco KL respecto al diámetro paralelo a AC. Puesto que $\angle B$ vale tanto como mide el arco igual a $\frac{1}{2}(\cup KL + \cup MN) = \cup KL$, el arco KL tiene una longitud constante y le corresponde el ángulo central igual al ángulo B.

II.298. Supongamos que O (fig. 54) es el punto de intersección de las rectas; A y A_1

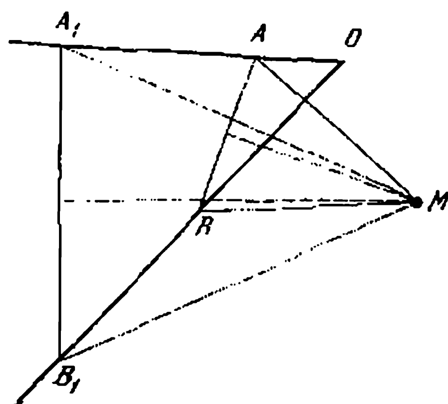


Fig. 54

son dos posiciones de un punto en una recta en distintos momentos de tiempo; B y B_1 son las posiciones de otro punto y en otra recta en estos mismos momentos de tiempo. Levantemos hacia AB y A_1B_1 perpendiculares en sus puntos medios y designemos por M su punto de intersección; $\triangle AA_1M = \triangle BB_1M$ por los tres lados: uno se obtiene del otro girando al ángulo AOB con el centro en M. Durante este giro cualquier posición del punto en AO pasa a la posición correspondiente del

punto en OB, por lo que M posee la propiedad necesaria.

II.299. a) Supongamos que A y B son los puntos de intersección de las circunferencias; A es el punto, del cual han partido los ciclistas; M y N, las posiciones de los ciclistas en cierto momento de tiempo. Si M y N se hallan a un lado de AB, entonces $\angle ABM = \angle ABN$;

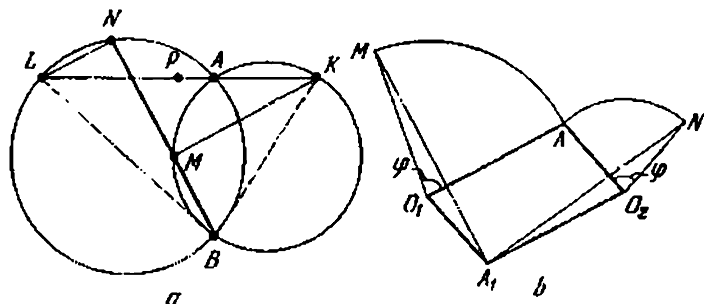


Fig. 55

si los mismos se hallan a los lados diferentes, entonces $\angle ABM + \angle ABN = 180°$, es decir, los puntos B, M y N se sitúan en una recta. Si L y K son los puntos de circunferencias, diametralmente opuestos a B (L y K son fijos), entonces, puesto que $\angle LNM = \angle NMK = 90°$, el punto medio de LK, o sea el punto P, será equidistante de N y M. Podemos cerciorarnos de que P es simétrico al punto B respecto del punto medio del segmento que une los centros de las circunferencias (fig. 55, *a*).

b) Sean O_1 y O_2 los centros de las circunferencias. Tomemos un punto A_1 tal, que

$O_1AO_2A_1$ sea un paralelogramo. Es fácil ver que $\triangle MO_1A_1 = \triangle NO_2A_1$, ya que $|MO_1| = |O_1A| = |O_2A_1|$, $|O_1A_1| = |O_2A| = |NO_2|$, $\angle MO_1A_1 = \varphi + \angle AO_1A_1 = \varphi + \angle AO_2A_1 = \angle NO_2A_1$, donde φ es el ángulo que corresponde a los arcos recorridos por los ciclistas (fig. 55, *b*). De esta manera, los puntos buscados son simétricos a los puntos de intersección de las circunferencias respecto al punto medio del segmento O_1O_2. *Observación*. En el punto a) se puede proceder de la misma manera que en el punto b), a saber: tomando el punto P de manera que $\triangle O_1PO_2 = \triangle O_1AO_2$ (A y P se hallan a un lado de O_1O_2 y no coinciden); es fácil demostrar la igualdad de los triángulos correspondientes.

II.300. b) Aprovéchese el resultado del punto a). Sustitúyase el giro alrededor de O_1 por dos simetrías axiales, tomando como eje de la segunda simetría la recta O_1O_2 y el giro alrededor del punto O_2, por dos simetrías, tomando en calidad del eje de la primera simetría la recta O_1O_2. *Observación*. Si $\alpha + \beta = 2\pi$, entonces el empleo sucesivo de los giros dados, como es fácil cerciorarse, es equivalente a la traslación paralela. *Respuesta*: si $\alpha + \beta < 2\pi$, los ángulos son iguales a $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}$, si $\alpha + \beta > 2\pi$, los ángulos son iguales a $\pi - \frac{\alpha}{2}$, $\pi - \frac{\beta}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

II.301. Hagamos sucesivamente tres giros en un sentido alrededor de los puntos K, L y M (o alrededor de K_1, L_1 y M_1) a ángulos α,

β y γ. Puesto que $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, la transformación obtenida es una traslación paralela (véase el problema II.300), Pero, por cuanto uno de los vértices del triángulo de partida en este caso permanece inmóvil, deben quedarse inmóviles todos los puntos del plano.

De tal manera, el centro del tercer giro (punto M) ha de coincidir con el centro de giro que se obtiene a consecuencia del empleo sucesivo de los dos primeros: alrededor de los puntos K y L. Ahora se puede valerse del resultado del problema II.300.

II.302. Designemos: $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle DOE = 2\beta$, $\angle FOA = 2\gamma$. Sea que K, M y L son los puntos de intersección, respectivamente, de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos BOC y AOF, BOC y DOE, AOF y DOE. El punto K se halla en el interior del triángulo AOB; además, $\angle BKO = 180^\circ - \angle BCO = 90^\circ + \alpha$, $\angle AKO = 90^\circ + \gamma$ y, puesto que $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, $\angle AKB = 90^\circ + \beta$. Precisamente de la misma manera L se encuentra en el interior del triángulo FOE y $\angle OLF = 90^\circ + \gamma$, $\angle OLE = 90^\circ + \beta$, $\angle FLE = 90^\circ + \alpha$. Por lo tanto, $|OL| = |AK|$, $\angle KOL = 2\gamma + \angle KOA + \angle LOF = 2\gamma + \angle KOA + \angle KAO = 90^\circ + \gamma = \angle AKO$; conque, los triángulos KOL y AKO son iguales, es decir, $|KL| = |AO| = R$. Análogamente se demuestra que también los otros dos lados del triángulo KLM son iguales a R.

II.303. Designaciones: $ABCD$ es el cuadrilátero dado; O_1, O_2, O_3, O_4 son los centros de los rombos construidos sobre AB, BC, CD,

DA, respectivamente; K y L son los puntos medios de los lados AB y BC; M es el punto medio de la diagonal AC. Los triángulos O_1KM y O_2LM son iguales $(|O_1K| = \frac{1}{2}|AB| = |LM|$, $|KM| = \frac{1}{2}|BC| = |O_2L|$, $\angle O_1KM = \angle O_2LM)$. Además, si $\angle ABC + \alpha < \pi$, estos triángulos están orientados hacia el interior del triángulo O_1MO_2, pero si $\angle ABC + \alpha > \pi$, estos triángulos se hallan fuera del triángulo O_1MO_2 (los ángulos de los rombos con el vértice B son iguales a α). Así, pues, $|O_1M| = |O_2M|$, $\angle O_1MO_2 = \pi - \alpha$. Precisamente del mismo modo $|O_3M| = |O_4M|$, $\angle O_3MO_4 = \pi - \alpha$. Por consiguiente, los triángulos O_1MO_3 y O_2MO_4 son iguales y uno se obtiene a partir del otro girando alrededor de M al ángulo $\pi - \alpha$. De aquí se deduce la afirmación del problema.

II.304. Supongamos que ABC es el triángulo dado, $A_1B_1C_1$ es el triángulo Δ, $A_2B_2C_2$ es el triángulo δ (A_1 y A_2 son los centros de los triángulos construidos sobre BC), los lados del triángulo ABC, como de costumbre, son iguales a a, b, c.

a) El hecho de que los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son regulares, se deduce, por ejemplo, del resultado del problema II.301.

b) Demostremos una afirmación más general. Si sobre los lados del $\triangle ABC$, hacia el exterior (o hacia el interior) están construidos los triángulos semejantes A_1BC, B_1CA, C_1AB de modo que $\angle A_1BC = \angle B_1CA = \angle C_1AB$,

$\angle A_1CB = \angle B_1AC = \angle C_1BA$, entonces los puntos de intersección de las medianas de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ coinciden. Notemos, al principio, que si M es el punto de intersección de las medianas del $\triangle ABC$, entonces $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$, y viceversa, si se cumple esta igualdad, entonces M es el punto de intersección de las medianas del $\triangle ABC$.

Nos queda comprobar que $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = 0$ o bien $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC_1}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA_1}) + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB_1}) = 0$. Pero $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$. Además, $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} = 0$, puesto que cada uno de los vectores $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{CB_1}$ se obtiene a partir de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ girando a un mismo ángulo ($\angle A_1BC$) y multiplicando por un mismo número.

c) Examinemos un caso más general. Sobre los lados del $\triangle ABC$, hacia fuera y hacia el interior de éste, están construidos, empleándolos como bases, los triángulos isósceles A_1BC, B_1CA, C_1BA y $A_1'BC$, $B_1'CA$, $C_1'BA$, en los cuales la razón entre la altura bajada sobre la base y la longitud de la base es igual a k. Sea que O es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$ y a, b, c son sus lados; A_0, B_0, C_0, respectivamente, son los puntos medios de BC, CA, AB. Supongamos, para concretar, que ABC es un triángulo acutángulo. Entonces,

$S_{A_1OC_1} = \frac{1}{2} | A_1O | \cdot | C_1O | \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} (|OA_0| + ka)(| OC_0 | + kc) \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} | OA_0 | \cdot | OC_0 | \times \operatorname{sen} B + \frac{1}{2} k^2 ac \operatorname{sen} B + \frac{k}{2} (a | OC_0 | + c | OA_0 |) \operatorname{sen} B = k^2 S_{ABC} + S_{A_0OC_0} + \frac{k}{4} b^2.$ Después de obtener correlaciones análogas para los triángulos A_1OB_1 y B_1OC_1 y sumarlas, encontramos: $S_{A_1B_1C_1} = \left(3k^2 + \frac{1}{4}\right) S_{ABC} + \frac{k}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ (esta igualdad permanece válida, si el $\triangle ABC$ es obtusángulo). Para el $\triangle A_1'B_1'C_1'$ tendremos: $S_{A_1'B_1'C_1'} = \left| \frac{k}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \left(3k^2 + \frac{1}{4}\right) S_{ABC} \right|$. Por consiguiente, si $\frac{k}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \left(3k^2 + \frac{1}{4}\right) S_{ABC} \geqslant 0$, entonces $S_{A_1B_1C_1} - S_{A_1'B_1'C_1'} = \left(6k^2 + \frac{1}{2}\right) S_{ABC}$, pero si $\frac{k}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \left(3k^2 + \frac{1}{4}\right) S_{ABC} < 0$, entonces $S_{A_1B_1C_1} - S_{A_1'B_1'C_1'} = \frac{k}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. Se puede demostrar que siempre $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3} S_{ABC}$ (en el problema II.362 se demuestra una desigualdad más fuerte), lo que significa que, para $k = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ la diferencia entre las áreas de los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_1'B_1'C_1'$ es igual a S_{ABC}.

II.305. Supongamos que los tres puntos dados forman el triángulo ABC. Son posibles dos familias de triángulos regulares circunscri-

tos alrededor del $\triangle ABC$. La primera familia se obtiene del modo siguiente. Construyamos sobre los lados del triángulo unas circunferencias de manera que los arcos de estas circunferencias, dispuestos fuera del triángulo, midan un ángulo de $4\pi/3$. Tomemos un punto arbitrario A_1 de la circunferencia construida sobre BC; la recta A_1B corta por segunda vez la circunferencia construida sobre BA en el punto C_1, mientras que la recta A_1C cortará la circunferencia construida sobre CA en el punto B_1. El triángulo $A_1B_1C_1$ es uno de los triángulos de la primera familia. Designemos por E, F y G los puntos de intersección de las bisectrices del $\triangle A_1B_1C_1$ con las circunferencias construidas sobre los lados del triángulo dado. Los puntos E, F y G son fijos (E es el punto medio del arco de la circunferencia construido sobre BC y dispuesto al mismo lado de BC que el $\triangle ABC$). Los puntos E, F y G son los centros de los triángulos regulares construidos sobre los lados del $\triangle ABC$, en su interior. El triángulo EFG es regular (véase el problema II.304), su centro coincide con el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC. El centro del $\triangle A_1B_1C_1$ se halla en la circunferencia circunscrita alrededor del EFG, el cuadrado del radio de esta circunferencia es igual (véase la solución del problema II.304) a $\frac{1}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-2S\sqrt{3}\right)$, donde a, b, c son los lados, S es el área del $\triangle ABC$.

La segunda familia de triángulos regulares circunscritos alrededor del $\triangle ABC$ se obtiene construyendo sobre los lados del $\triangle ABC$

unas circunferencias, cuyos arcos dispuestos fuera del $\triangle ABC$ son iguales a $2\pi/3$.

El lugar geométrico de puntos buscado consta de dos circunferencias concéntricas, cuyos centros coinciden con el punto de intersección de las medianas del $\triangle ABC$, mientras que los radios son iguales a $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\pm 2S\sqrt{3}}$.

II.306. Demostremos que los triángulos CB_1A_2 y CA_1B_2 se obtienen uno del otro girando alrededor del punto C a un ángulo de 90°. En efecto, $\triangle CAA_1 = \triangle CBB_1$ ($|BB_1| = |AC|$, $|BC| = |AA_1|$, $\angle CBB_1 = \angle CAA_1$) y, puesto que $AA_1 \perp BC$ y $BB_1 \perp AC$, entonces $B_1C \perp A_1C$. De la misma manera A_2C y B_2C son iguales y mutuamente perpendiculares.

II.307. Demuéstrese que las tangentes a la circunferencia, trazadas a partir de los vértices, entre los cuales se encuentra un vértice del polígono, son iguales. De aquí se deduce que para el polígono con número impar de lados los puntos de tangencia son los puntos medios de sus lados.

II.308. Notemos que, si se examina el sistema de vectores que tienen su origen en el centro del polígono regular de n lados, y los extremos, en sus vértices, la suma de estos vectores es igual a cero. En efecto, si todos estos vectores giran a un ángulo de $2\pi/n$, su suma no variará y, por otra parte, el vector igual a su suma girará al mismo ángulo. Por lo tanto, también la suma de las proyecciones de estos vectores sobre cualquier eje es igual a cero.

Regresemos al comienzo del problema. Si φ es el ángulo entre la recta dada (designémosla por l) y uno de los vectores, los demás vectores forman los ángulos $\varphi + \frac{2\pi}{n}$, $\varphi + 2\frac{2\pi}{n}$, ..., $\varphi + (n-1)\frac{2\pi}{n}$. El cuadrado de la distancia desde k-ésimo vértice hasta l es igual a $\operatorname{sen}^2\left(\varphi + k\frac{2\pi}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(2\varphi + k\frac{4\pi}{n}\right)\right)$. Pero las magnitudes $\cos\left(2\varphi + k\frac{4\pi}{n}\right)$ pueden considerarse como proyecciones sobre l de un sistema de n vectores que forman con l los ángulos $2\varphi + k\frac{4\pi}{n}$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$). Siendo n impar, estos vectores forman un polígono regular de n lados; siendo n par, será un polígono dos veces repetido de $\frac{n}{2}$ lados. *Respuesta*: $\frac{n}{2}$.

II.309. a) Si un lado del polígono es igual a a, S es su área, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las distancias a partir de cierto punto en su interior hasta los lados, la afirmación del problema se deduce de la igualdad $S = (ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n)/2$.

b) Examinemos un polígono regular que contiene el polígono dado en su interior, cuyos lados son paralelos a los lados del dado. La suma de las distancias a partir de un punto arbitrario en el interior del polígono dado hasta los lados del regular es constante (punto a) y se diferencia de la suma de las distancias

hasta los lados del dado en una magnitud constante.

II.310. Designemos por $B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}$ los puntos simétricos a $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ respecto al diámetro A_0A_{2n+1}, C_k y C'_k son los puntos de intersección de la recta A_kA_{2n+1-k} con OA_n y OA_{n+1}. Sean D_{k-1} y D_k los puntos de intersección de las rectas A_kB_{k-1} y A_kB_{k+1} con el diámetro. Es evidente que estos mismos puntos son los puntos de intersección de las rectas B_kA_{k-1} y B_kA_{k+1} con el diámetro. Está claro que $\triangle D_{k-1}A_kD_k =$ $= \triangle C_kOC'_k$. De este modo, la suma de segmentos $C_kC'_k$ es igual a la suma de segmentos $D_{k-1}D_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, $D_0 = A_0$, $D_n = O$, es decir, es igual al radio.

II.311. Supongamos que A (fig. 56) es el punto dado, A_k es cierto vértice del polígono

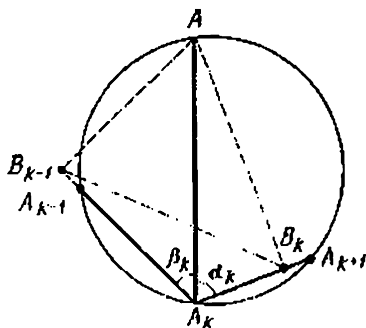


Fig. 56

de $2n$ lados, B_{k-1} y B_k son los pies de las perpendiculares bajadas desde A sobre los lados que comprenden A_k, α_k y β_k son los ángulos

formados por la recta AA_k con estos lados ($\beta_k = \angle AA_kB_{k-1}$, $\alpha_k = \angle AA_kB_k$). Puesto que alrededor del cuadrilátero $AB_{k-1}A_kB_k$ puede circunscribirse una circunferencia, entonces $\angle AB_{k-1}B_k = \alpha_k$, $\angle AB_kB_{k-1} = \beta_k$ (o completan estos ángulos hasta 180°); de esta manera, según el teorema de los senos, $\frac{|AB_{k-1}|}{|AB_k|} = \frac{\text{sen}\,\beta_k}{\text{sen}\,\alpha_k}$, $\frac{|AB_{k-1}|\,|AB_{k+1}|}{|AB_k|^2} = \frac{\text{sen}\,\beta_k\,\text{sen}\,\alpha_{k+1}}{\text{sen}\,\alpha_k\,\text{sen}\,\beta_{k+1}}$. Multiplicando estas igualdades para $k = 2, 4, \ldots, 2n$ y sustituyendo el índice $2n + 1$ por 1, obtenemos el resultado necesario.

II.312. Demuéstrese que, si O_k y O_{k+1} son los centros de las circunferencias que son tangentes a la circunferencia dada en los puntos A_k y A_{k+1}, B es el punto de su intersección que se halla en la cuerda A_kA_{k+1}; r_k, r_{k+1} son sus radios, entonces $r_k + r_{k+1} = r$, $\angle A_kO_kB = \angle A_{k+1}O_{k+1}B = \angle A_kOA_{k+1}$ (r es el radio de la circunferencia dada, O es su centro). De aquí se deduce que los radios son iguales, uno sí y otro no, lo que, para n impar conducirá a que todos ellos serán iguales a $r/2$. Además, $\cup A_kB + \cup BA_{k+1} = \cup A_kA_{k+1}$ (se toman los arcos menores de las circunferencias correspondientes).

II.313. a) Sea A un punto arbitrario de la circunferencia (A se halla en el arco A_1A_{2n+1}). Designemos un lado del polígono por a y la longitud de la diagonal que une los vértices, por b contando uno sí y otro no. Según el teorema de Tolomeo (problema II.237) para el cuadrilátero $AA_kA_{k+1}A_{k+2}$ tenemos: $|AA_k| \times$

$\times a + |AA_{k+2}|a = |AA_{k+1}|b$ ($k = 1, 2, \ldots, 2n-1$). Correlaciones análogas pueden escribirse para los cuadriláteros $A_{2n}A_{2n+1}AA_1$ y $A_{2n+1}AA_1A_2$:

$$|AA_1|a + |AA_{2n+1}|b = |AA_{2n}|a,$$
$$|AA_{2n+1}|a + |AA_1|b = |AA_2|a.$$

Sumando todas estas igualdades y dejando los vértices con números pares a la derecha y con los impares a la izquierda, obtenemos la afirmación requerida.

b) Nuestra afirmación se deduce del punto a) y del resultado del problema I.206. (Fórmula análoga puede obtenerse en el caso de la tangencia interior.)

II.314. a) Sea que l corta AC y BC en los puntos K y N, respectivamente, y es tangente

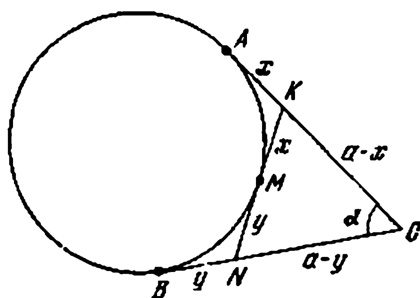


Fig. 57

a la circunferencia en el punto M (fig. 57). Designamos: $|AC| = |BC| = a$, $|AK| = |KM| = x$, $|BN| = |NM| = y$. Es evidente que $\frac{w^2}{uv} = \frac{(a-x)(a-y)}{xy}$, pero según

el teorema de los cosenos, para el $\triangle CKN$ es válida la igualdad $(x+y)^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2 - 2(a-x)(a-y)\cos\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{xy}{(a-x)(a-y)}$. De esta manera, $\frac{uv}{w^2} = \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$. (De manera análoga se examinan otros casos de disposición de la recta l.)

b) Aprovechemos el resultado del punto a). Multiplicando las igualdades correspondientes para todos los ángulos del polígono de n lados, obtenemos el cuadrado de la razón buscada y la misma razón resultará igual a $1/\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha_2}{2}\ldots\operatorname{sen}\frac{\alpha_n}{2}\right)$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son los ángulos del polígono.

c) Hagamos uso del resultado del punto a). Designando los puntos de tangencia de los lados $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2n-1}A_{2n}, A_{2n}A_1$ con la circunferencia por $B_1, B_2, \ldots, B_{2n-1}, B_{2n}$, respectivamente, y por $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$, las distancias desde $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$, respectivamente, hasta l, por $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$, las distancias desde $B_1, B_2, \ldots, B_{2n}$, respectivamente, hasta l obtenemos:

$$\frac{x_1^2}{y_{2n}y_1} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha_1}{2}}, \quad \frac{x_2^2}{y_1y_2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha_2}{2}}, \ldots$$

$$\ldots, \frac{x_{2n}^2}{y_{2n-1}y_{2n}} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha_{2n}}{2}},$$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ son los ángulos del polígono. Multiplicando las igualdades que contienen $x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}$ y dividiéndolas por el producto

de las demás igualdades, obtenemos:

$$\left(\frac{x_1x_3\ldots x_{2n-1}}{x_2x_4\ldots x_{2n}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha_2}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha_4}{2}\ldots\operatorname{sen}\frac{\alpha_{2n}}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha_3}{2}\ldots\operatorname{sen}\frac{\alpha_{2n-1}}{2}}\right)^2.$$

II.315. La afirmación del problema puede demostrarse por la inducción. El comienzo de la inducción, $n = 4$, se ha analizado en el problema II.235.

Sin embargo, puede proponerse otro camino, basado sobre la igualdad siguiente. Supongamos que en el triángulo ABC el ángulo máximo es A; r y R, respectivamente, son los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita; d_a, d_b, d_c son las distancias a partir del centro de la circunferencia circunscrita hasta los lados correspondientes del triángulo. Entonces

$$r + R = d_a + d_b + d_c \qquad (1)$$

para el triángulo acutángulo y

$$r + R = -d_a + d_b + d_c \qquad (2)$$

para el triángulo obtusángulo (para el triángulo rectángulo $d_a = 0$ y para éste es válida cualquiera de las correlaciones aducidas).

Demostración. Supongamos que ABC es un triángulo acutángulo; A_0, B_0, C_0 son, respectivamente, los puntos medios de los lados BC, CA, AB; O es el centro de la circunferencia circunscrita. Según el teorema de Tolomeo (problema II.237) para el cuadrilátero AB_0OC_0

tenemos: $\frac{b}{2} d_c + \frac{c}{2} d_b = \frac{a}{2} R$. Después de escribir otras dos relaciones semejantes para los cuadriláteros BC_0OA_0 y CB_0OA_0 y al sumarlas, obtenemos:

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) d_c + \left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}\right) d_b + \left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right) d_a =$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c) R = pR,$$

de donde $p(d_a + d_b + d_c) - \frac{1}{2}(cd_c + bd_b + ad_a) = pR$. Puesto que $\frac{1}{2}(cd_c + bd_b + ad_a) = S = pr$, después de reducir por p obtenemos la igualdad (1). De manera análoga se examina el caso de $\angle A > 90°$.

De las correlaciones (1), (2) se deduce la afirmación del problema. Para esto escribamos las igualdades correspondientes para todos los triángulos de la partición. Notemos que cada diagonal sirve de lado para dos triángulos. Por consiguiente, en las correlaciones que corresponden a estos triángulos, la distancia hasta la diagonal elegida tendrá signos opuestos. Por consiguiente, si sumamos todas estas igualdades, obtenemos, a condición de que el centro de la circunferencia se halle en el interior del polígono, $\sum r + R = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$, donde $d_1, d_2, \ldots, d_n$ son las distancias a partir del centro de la circunferencia hasta los lados del polígono. Pero si el centro de la circunferencia se sitúa fuera del polígono, la distancia hasta el lado máximo debe tomarse con el signo menos.

II.316. Examinemos, para concretar, el caso, en que el punto M se halla en el interior del polígono. Designemos por u y v las distancias desde M hasta A_1A_2 y A_1A_n, respectivamente, y por x e y, correspondientemente, las proyecciones de A_1M sobre A_1A_2 y A_1A_n (las magnitudes x e y deben considerarse positivas, si estas proyecciones se hallan en los rayos A_1A_2 y A_1A_n, y negativas en el caso contrario), $|A_1B_1| = |A_1B_n| = a$, $\angle A_2A_1A_n = \alpha$. Es posible expresar u y v a través de x e y: $u = \frac{y}{\operatorname{sen}\alpha} - x\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$, $v = \frac{x}{\operatorname{sen}\alpha} - y\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$; de aquí $u + v = (x + y)\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = (x+y)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = (x+y)\frac{r}{a}$. Ahora tenemos:

$$(|MB_1|^2 + |MB_n|^2)\,a = ((x-a)^2 + u^2 + (y-a)^2 + v^2)\,a = ((x-a)^2 + (u-r)^2 + (y-a)^2 + (v-r)^2 + 2r(u+v) - 2r^2)\,a = 2d^2a + 2ra(u+v) - 2r^2a = 2d^2a + 2r^2(x+y) - 2r^2a.$$

Después de escribir igualdades análogas para cada vértice y de sumarlas, obtenemos la afirmación del problema.

II.317. Examinemos tres triángulos: ABC, ACD y ADB que tienen el vértice común A. Designemos por B_1, C_1 y D_1 las proyecciones de M sobre AB, AC y AD, respectivamente. Las rectas B_1C_1, C_1D_1 y D_1B_1 son las rectas de Simson del punto M respecto a los triángulos ABC, ACD y ADB. Pero los puntos A, M,

tenemos: $\frac{b}{2}d_c + \frac{c}{2}d_b = \frac{a}{2}R$. Después de escribir otras dos relaciones semejantes para los cuadriláteros BC_0OA_0 y CB_0OA_0 y al sumarlas, obtenemos:

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)d_c+\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}\right)d_b+\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)d_a=$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)R=pR,$$

de donde $p(d_a + d_b + d_c) - \frac{1}{2}(cd_c + bd_b + ad_a) = pR$. Puesto que $\frac{1}{2}(cd_c + bd_b + ad_a) = S = pr$, después de reducir por p obtenemos la igualdad (1). De manera análoga se examina el caso de $\angle A > 90°$.

De las correlaciones (1), (2) se deduce la afirmación del problema. Para esto escribamos las igualdades correspondientes para todos los triángulos de la partición. Notemos que cada diagonal sirve de lado para dos triángulos. Por consiguiente, en las correlaciones que corresponden a estos triángulos, la distancia hasta la diagonal elegida tendrá signos opuestos. Por consiguiente, si sumamos todas estas igualdades, obtenemos, a condición de que el centro de la circunferencia se halle en el interior del polígono, $\sum r + R = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$, donde $d_1, d_2, \ldots, d_n$ son las distancias a partir del centro de la circunferencia hasta los lados del polígono. Pero si el centro de la circunferencia se sitúa fuera del polígono, la distancia hasta el lado máximo debe tomarse con el signo menos.

Sea que la recta D_2C_2 corta A_2B_2 y A_3B_3 en los puntos L' y M', respectivamente. Al igual que en el caso anterior, demostremos que existe la circunferencia γ' con el centro en la recta que pasa por los centros α y β y es tangente a A_2B_2 y A_3B_3 en los puntos L' y M,

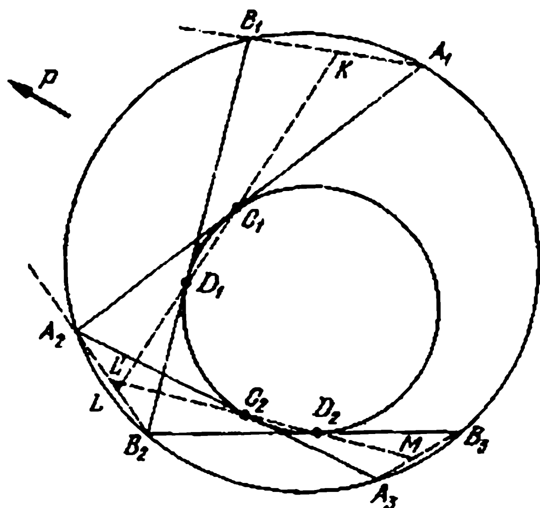


Fig. 58

respectivamente. Demostremos que γ y γ' coinciden. Para esto es suficiente demostrar la coincidencia de L y L'. Tenemos:

$$\frac{|A_2L|}{|LB_2|}=\frac{S_{A_2C_1D_1}}{S_{B_2C_1D_1}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}|D_1C_1|\cdot|A_2C_1|\operatorname{sen}\angle A_2C_1D_1}{\frac{1}{2}|D_1C_1|\cdot|B_2D_1|\operatorname{sen}\angle B_2D_1C_1}=$$

$=\dfrac{|A_2C_1|}{|B_2D_1|}$. De manera análoga $\dfrac{|A_2L'|}{|L'B_2|}=$

$= \frac{|A_2C_2|}{|B_2D_2|} = \frac{|A_2C_1|}{|B_2D_1|}$, es decir, L y L' coinciden. *Observación.* De los razonamientos se deduce que en el caso examinado los puntos de tangencia de γ con las rectas A_1B_1, A_2B_2, . . ., se hallan en el interior de los segmentos A_1B_1, A_2B_2, . . .

II.319. En las designaciones del problema anterior la afirmación se reduce a lo siguiente: si A_{n+1} coincide con A_1, entonces B_{n+1} coincide con B_1. Supongamos que esto no es así. Entonces A_1B_1 y A_1B_{n+1} son tangentes a la circunferencia γ, A_1A_2 corta γ, B_1 y B_{n+1} se hallan en el arco A_1A_2 que corresponde al segmento, el cual no contiene β. Los puntos de tangencia de A_1B_1 y A_1B_{n+1} a γ se encuentran en el interior de los segmentos A_1B_1 y A_1B_{n+1}. Resulta que a partir de A_1 hacia γ están trazadas dos tangentes; además, sus puntos de tangencia a γ se disponen a un lado de la secante A_1A_2. Esto no puede ser.

II.320. Examinemos el $\triangle B_0XC_0$. La recta XR es la bisectriz del ángulo C_0XB_0. Es fácil comprobar que $\angle C_0RB_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times \times \angle C_0XB_0$. De aquí se deduce que C_0R y B_0R son las bisectrices de los ángulos XC_0B_0 y XB_0C_0 (véase el problema I.46). Precisamente del mismo modo en los triángulos C_0YA_0 y A_0ZB_0 los puntos P y Q son los puntos de intersección de las bisectrices. De aquí, tomando en consideración que $\angle PA_0Q = \angle A/3$, $\angle QB_0R = \angle B/3$, $\angle RC_0P = \angle C/3$, obtenemos la afirmación, de la cual se deduce el teorema de Morley.

II.321. Al solucionar el problema, apliquemos las siguientes afirmaciones que se demuestran fácilmente.

a) Si en la bisectriz del ángulo interior M del triángulo KLM, en su interior se toma un punto N de manera que $\angle KNL = \frac{1}{2} \times (\pi + \angle KML)$, entonces N es el punto de intersección de las bisectrices del $\triangle KLM$ (véase el problema I.46).

b) Si en el interior del ángulo KML, fuera del $\triangle KLM$, en la prolongación de la bisectriz del ángulo interior M se toma el punto N de tal manera que $\angle KNL = \frac{1}{2} (\pi - \angle KML)$, entonces N es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo M y de las bisectrices de los ángulos exteriores K y L.

c) Si en la bisectriz del ángulo exterior K del triángulo KML, en el interior del ángulo KML se toma el punto N de manera que $\angle MNL = \frac{1}{2} \angle MKL$, entonces N es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo M y de las bisectrices de los ángulos exteriores K y L.

La demostración de nuestra afirmación para todos los valores posibles de i, j, k (resulta que hay siete casos de éstos, con la precisión de hasta la permutación de los índices i, j, k) hagámosla según un esquema, enunciando y demostrando cada vez la afirmación inversa correspondiente, equivalente al caso examinado del teorema de Morley. Un ejemplo de razonamiento según semejante esquema lo da el

problema anterior. Para no repetir, primero separemos la parte general de los razonamientos. Examinemos el triángulo regular PQR. En sus lados, usándolos como bases, están construidos los triángulos isósceles PXQ, QYR, RZP (indicaremos más adelante de qué manera y qué triángulos están construidos). Designemos por A_0 el punto de intersección de las rectas ZP e YQ; por B_0, el punto de intersección de las rectas XQ y ZR; por C_0, el de las rectas YR y XP. Entonces, para cada caso demostremos que el triángulo $A_0B_0C_0$ es semejante al triángulo ABC y los rayos A_0P y A_0Q, B_0Q y B_0R, C_0R y C_0P son para éste las trisectrices de género correspondiente.

Indiquemos ahora cómo y qué triángulos deben construirse en los lados del triángulo PQR en cada caso.

1) $i=j=k=1$; $\angle PXQ=\frac{1}{3}(\pi+2\angle A)$, $\angle QYR=\frac{1}{3}(\pi+2\angle B)$, $\angle RZP=\frac{1}{3}(\pi+2\angle C)$. Todos los triángulos están dispuestos por la parte exterior respecto al $\triangle PQR$.

2) $i=1$, $j=k=2$; $\angle PXQ=\frac{1}{3}(\pi-2\angle A)$, $\angle QYR=\pi-\frac{2\angle B}{3}$, $\angle RZP=\pi-\frac{2\angle C}{3}$. Todos los triángulos están dispuestos en el exterior respecto al $\triangle PQR$. (Supongamos que $\angle A<\pi/2$. Pero si $\angle A>\pi/2$, entonces el $\triangle PXQ$ pasa al otro lado del $\triangle PQR$,

$\angle PXQ = \frac{1}{3}(2\angle A - \pi)$. Si $\angle A = \pi/2$, entonces el $\triangle PXQ$ se transformará en un par de rectas paralelas. En lo ulterior hace falta tener en cuenta esta observación.)

3) $i = j = 1$, $k = 3$; $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle A)$, $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle B)$, $\angle RZP = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle C)$. Los triángulos PXQ y QYR están dispuestos en el exterior respecto al $\triangle PQR$, y el $\triangle RZP$, en el interior (véase la observación del punto 2).

4) $i = j = k = 2$; $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle A)$, $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle B)$, $\angle RZP = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle C)$. Todos los triángulos están dispuestos por el mismo lado de los lados correspondientes del $\triangle PQR$ que el propio $\triangle PQR$ (véase la observación del punto 2).

5) $i = 1, j = 2, k = 3$; $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle A)$, $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle B)$, $\angle RZP = \pi - \frac{2\angle C}{3}$. El triángulo PXQ está construido hacia el exterior respecto al $\triangle PQR$, mientras que los otros dos, hacia el interior (véase la observación del punto 2).

6) $i = 2$, $j = k = 3$; $\angle PXQ = \pi - \frac{2\angle A}{3}$, $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle B)$, $\angle RZP = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle C)$. El triángulo PXQ está dispuesto hacia el exterior, mientras que los otros dos, hacia el interior respecto al $\triangle PQR$.

7) $i=j=k=3$; $\angle PXQ = \pi - \frac{2\angle A}{3}$, $\angle QYR = \pi - \frac{2\angle B}{3}$, $\angle RZP = \pi - \frac{2\angle C}{3}$. Todos los triángulos están dispuestos en el interior del $\triangle PQR$.

El punto 1 está demostrado en el problema II.320.

A título de ejemplo demostremos el punto 2.

Sea que $\angle A < \pi/2$. Examinemos el triángulo B_0XC_0, en el cual XR es la bisectriz del ángulo B_0XC_0. Además, $\angle B_0RC_0 = \frac{1}{2}(\pi + \angle B_0XC_0)$. En correspondencia con la afirmación a), R es el punto de intersección de las bisectrices de este triángulo (si $A > \pi/2$, entonces B_0R y C_0R son las bisectrices de los ángulos exteriores del triángulo B_0XC_0). A continuación, en C_0YA_0 tenemos: YP es la bisectriz del ángulo exterior Y, $\angle A_0PC_0 = \frac{1}{2}\angle AYC_0$ (es fácil comprobarlo). En correspondencia con la afirmación c), P es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo C_0A_0Y y de las bisectrices de los ángulos exteriores A_0C_0Y y C_0YA_0 del triángulo C_0YA_0. Precisamente del mismo modo el punto Q respecto al $\triangle A_0ZB_0$ es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo ZA_0B_0 y de las bisectrices de los ángulos exteriores A_0ZB_0 y A_0B_0Z. (De esto se deduce que el triángulo PQR respecto al triángulo $A_0B_0C_0$ está formado al intersecarse las trisectrices de primer género del ángulo A_0 con las trisectrices de

segundo género de los ángulos B_0 y C_0 (se tiene en cuenta el punto 2).) Pero el mismo $\triangle A_0B_0C_0$ es semejante al $\triangle ABC$.

En todos los demás puntos 3—7, los razonamientos son análogos y varían sólo las afirmaciones empleadas a), b), c).

Al cambiar de lugares los índices i, j, k, notemos que al punto 5 le corresponden seis triángulos regulares; a los puntos 2, 3, 6, tres triángulos regulares a cada uno; a los puntos 1, 4 y 7, sendos triángulos regulares. De tal manera, en total obtenemos diez y ocho triángulos regulares.

Ahora elijamos en cada caso las dimensiones del $\triangle PQR$ de manera que el $\triangle A_0B_0C_0$ correspondiente sea igual al $\triangle ABC$. Sobrepongamos los diez y ocho dibujos obtenidos uno sobre otro de modo que coincidan los triángulos ABC. Escojamos el siguiente orden de superposición: primero tomemos el dibujo que corresponde al punto 1, luego, tres dibujos que corresponden al punto 3, después, seis dibujos del punto 5 y tres dibujos del punto 2 y, por fin, tres dibujos del punto 6 y sendos dibujos de los puntos 4 y 7. En cada una de las superposiciones sucesivas, por lo menos uno de los vértices del triángulo regular correspondiente ha de coincidir con uno de los vértices de los triángulos regulares ya existentes. El cálculo de los ángulos muestra que cinco vértices de dos triángulos regulares que tienen un vértice común, se hallan en dos rectas que pasan por este vértice común. De esta manera, los vértices de todos los diez y ocho triángulos regulares «deben» situarse como está mos-

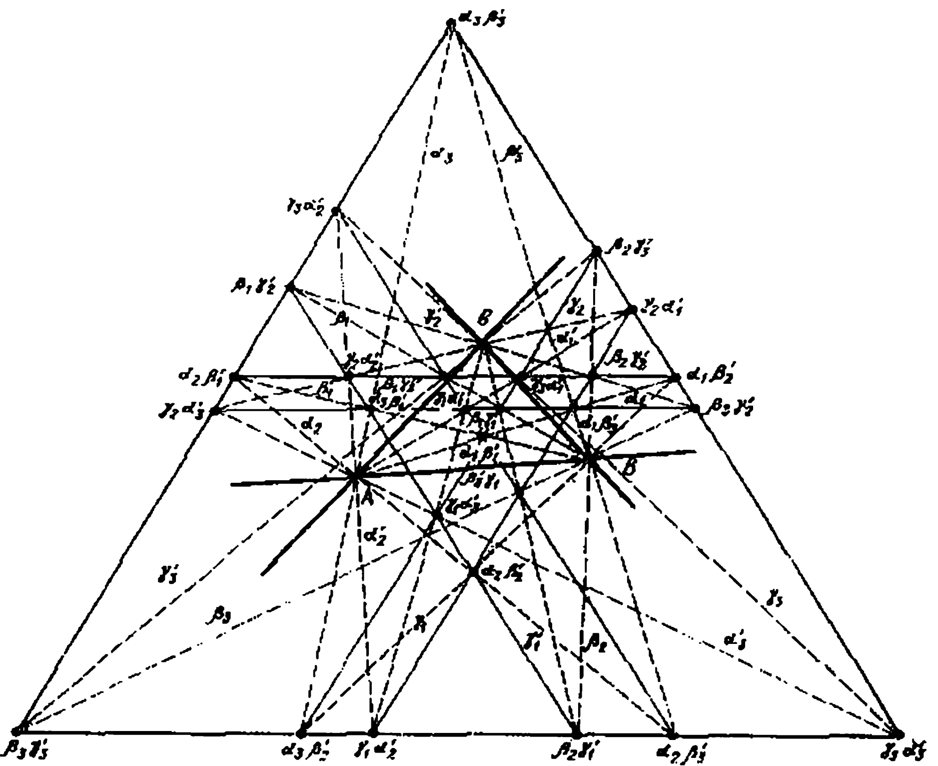


Fig. 59

trado en la fig. 59. (En este dibujo por $\alpha_1\beta'_1$, etc. se designa el punto de intersección de las trisectrices α_1 y β'_1.)

II.322. Para el triángulo regular con el lado 1 el radio de cada una de las circunferencias de Malfatti es igual a $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$. La suma de las áreas de los círculos correspondientes es $\frac{3\pi(2-\sqrt{3})}{8}$. Pero la suma de las áreas de los círculos, uno de los cuales está inscrito en este triángulo, mientras que otros dos son tangentes a éste y a dos lados del triángulo cada uno, es igual a $\frac{11\pi}{108} > \frac{3\pi(2-\sqrt{3})}{8}$.

II.323. Hágase uso de la igualdad $Rr = \frac{abc}{4p}$ y de la desigualdad $2p = a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ (teorema del valor medio del cálculo diferencial).

II.324. Si p_1 es el semiperímetro del triángulo con vértices en las bases de alturas del dado; p, S, r y R son, respectivamente, el semiperímetro, el área, el radio de la circunferencia inscrita y el radio de la circunferencia circunscrita, entonces $S = pr$ y, además, $S = p_1R$ (esto último se deduce del hecho de que el radio de la circunferencia circunscrita, el cual se dirige hacia el vértice del triángulo, es perpendicular al segmento que une las bases de las alturas bajadas sobre los lados que parten de este vértice). Por consiguiente, $p_1 = p\frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{2}p$.

II.325. Si m_a es la mayor de las medianas,

al sustituir en la correlación $m_a^2 > m_b^2 + m_c^2$ que se deduce del planteamiento, las medianas por los lados a, b y c del triángulo (problema I.11), obtenemos que $5a^2 < b^2 + c^2$, de donde $\cos A > \frac{2(b^2+c^2)}{5bc} = \frac{2}{5}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geqslant \frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

II.326. Sea O el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$. Supongamos que todos los ángulos indicados en la condición, son superiores a $\pi/4$. Entonces, en los segmentos OB y OC se puede tomar los puntos B_1 y C_1, respectivamente, de tal manera que $\angle B_1AO = \angle OB_1C_1 = \pi/4$. Sea que $\angle BOA = \alpha > \pi/4$.

Tenemos: $|OC| > |OC_1| = \frac{|OB_1|}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} =$

$$= \frac{|OA|}{2\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{|OA|}{\cos 2\alpha} \geqslant$$

$\geqslant |OA|$. De la misma manera demostramos la desigualdad $|OA| > |OC|$. He aquí una contradicción.

II.327. Supongamos que en el $\triangle ABC$ los lados están ligados mediante la relación $c \leqslant b \leqslant a$. Tomemos en CB el punto M de tal manera que $\angle CAM = \frac{1}{2}\angle C$. Hay que demostrar que $|CM| \leqslant \frac{a}{2}$. Según el teorema de los senos, para el $\triangle CAM$ tenemos: $|CM| =$

$$= \frac{b \operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3C}{2}} = \frac{b}{2\cos C + 1} = \frac{ab^2}{a^2 + ab + b^2 - c^2} \leqslant \frac{a}{2}.$$

II.328. Supongamos que D es el punto medio de AC. Levantemos en D la perpendicular hacia AC y designemos por M su punto de intersección con BC; $\triangle AMC$ es isósceles, por lo tanto, $\angle MAC = \angle BCA$. Según la condición, el $\triangle ABD$ también es isósceles, $\angle ABD = \angle BDA$, $\angle ABM > 90°$ (según la condición), $\angle ADM = 90°$; por consiguiente, $\angle MBD > \angle MDB$ y $|MD| > |BM|$. De aquí se deduce que $\angle MAD > \angle MAB$ (si representamos simétricamente B respecto a la recta AM, obtenemos el punto B_1 en el interior del ángulo MAD, puesto que $MD \perp AD$ y $|MD| > |MB| = |MB_1|$; de tal modo, $\angle C > \angle A - \angle C$, $\angle C > \frac{1}{2}\angle A$.

II.329. Si la circunferencia es tangente a las prolongaciones de los lados AB y AC del triángulo ABC y su centro es O, es fácil encontrar que $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$. De esta manera, $\angle BOC + \angle A = 90° + \frac{1}{2}\angle A \neq 180°$.

II.330. Supongamos que AD es la altura, AL, la bisectriz y AM, la mediana. Prolonguemos la bisectriz hasta que se interseque en el punto A_1 con la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo. Puesto que $MA_1 \parallel AD$, entonces $\angle MA_1A = \angle LAD$. *Respuesta*: si $\angle A < 90°$, el ángulo entre la mediana y la bisectriz es menor que el ángulo entre la bisectriz y la altura. Si $\angle A > 90°$, entonces, al revés; si $\angle A = 90°$, los ángulos son iguales.

II.331. Si AD es la altura, AN es la me-

diana, M es el punto de intersección de las medianas, entonces $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{|DB|}{|AD|} + \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|AD|} > \frac{|CB|}{|AN|} = \frac{|CB|}{3\,|MN|} = \frac{2}{3}$.

II.332. Del hecho de que $S_{BAM} = S_{BCM}$ y $|BC| > |BA|$, $|CM| > |MA|$ se deduce que sen $\angle BAM >$ sen $\angle BCM$. Por lo tanto, si los ángulos son agudos, entonces $\angle BAM > \angle BCM$; sólo el ángulo BAM puede ser obtuso. De esta manera, siempre $\angle BAM > \angle BCM$.

II.333. Si $|OA| = a$, R es el radio de la circunferencia, K es el punto de intersección de OA y DE, es fácil encontrar que $|OK| = a - \frac{a^2 - R^2}{2a} = \frac{a^2 + R^2}{2a} > R$.

II.334. Las designaciones se dan en la fig. 60. En el primer caso (fig. 60, *a*) $|AB| <$

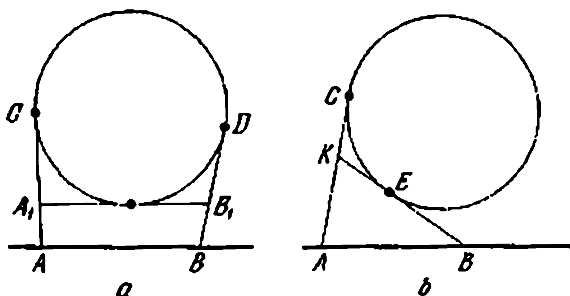


Fig. 60

$< |AA_1| + |A_1B_1| + |B_1B| = |AA_1| + |A_1C| + |B_1D| + |BB_1| = |AC| + |BD|$. En el segundo caso (fig. 60, *b*) $|AB| > |BK| - |AK| > |BE| -$

$- \mid AC \mid$. La afirmación inversa se demuestra fácilmente por reducción al absurdo.

II.335. Sean K, L y M los puntos de intersección de las rectas trazadas con AC. Designemos: $\mid AC \mid = b$, $\mid BC \mid = a$, $\mid AB \mid = c$, $\mid BL \mid = l$. Según el teorema de la bisectriz del ángulo interior encontramos: $\mid LC \mid = \frac{ab}{a+c}$; empleando una vez más este teorema para el $\triangle BCL$, hallamos: $\mid LM \mid = \frac{ba}{a+c} \cdot \frac{l}{l+a} = \frac{ba}{a+c} \left(1 - \frac{a}{a+l}\right)$; pero $\angle BLA = \frac{1}{2} \angle B + \angle C = \frac{\pi - \angle A + \angle C}{2} > \angle A$ (puesto que $\angle C > 3 \angle A - \pi$). Por lo tanto, $c > l$ y $\mid LM \mid < \frac{ba}{a+c} \left(1 - \frac{a}{a+c}\right) =$ $= b \frac{ac}{(a+c)^2} \leqslant \frac{b}{4}$.

II.336. Supongamos que $ABCD$ es el cuadrilátero dado. Examinemos el cuadrilátero AB_1CD, donde B_1 es simétrico a B respecto a la mediatriz dirigida hacia la diagonal AC. Es evidente que las áreas de $ABCD$ y AB_1CD son iguales, los lados de AB_1CD en orden de recorrido son iguales a b, a, c, d. Para el cuadrilátero AB_1CD es evidente la desigualdad $S \leqslant$ $\leqslant 1/2\,(ac + bd)$. La igualdad tiene lugar, si $\angle DAB_1 = \angle B_1CD = 90°$, es decir, el cuadrilátero AB_1CD es inscrito con dos ángulos opuestos iguales a 90° cada uno; por consiguiente, el cuadrilátero $ABCD$ también está inscrito en la misma circunferencia y sus diagonales son perpendiculares.

II.337. Examinemos dos casos.

1) El triángulo dado (ABC) es acutángulo.

Sea que el $\angle B$ es el máximo: $60^\circ \leqslant \angle B < 90^\circ$. Puesto que las bisectrices de los ángulos A y C son menores de 1, también las alturas de estos ángulos h_A y h_C son menores de 1. Tenemos $S_{ABC} = \frac{h_A h_C}{2 \operatorname{sen} B} < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2) Si uno de los ángulos del triángulo, por ejemplo, B no es agudo, los lados que lo comprenden, son menores que las bisectrices correspondientes, es decir, menores de 1, y el área no supera a $1/2$.

II.338. Sea c el lado máximo, opuesto al vértice C. Si $a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2 > 0$, entonces $a^2 + b^2 > 8R^2 - c^2 \geqslant c^2$ (ya que $c \leqslant 2R$), es decir, el triángulo es acutángulo. Inversamente, supongamos que el triángulo es acutángulo; entonces $a^2 + b^2 + c^2 = 2m_c^2 + \frac{3}{2} c^2$ (m_c es la mediana al lado c); por eso, cuanto menor es la mediana, tanto menor es $a^2 + b^2 + c^2$, pero la mediana es máxima, si C es el punto medio del arco, y disminuye al desplazarse C por el arco; pero cuando el triángulo pasa a ser rectángulo, entonces $a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2$ será igual a 0.

II.339. Al sustituir R y r según las fórmulas $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{p}$, úsese para S la fórmula de Herón y la igualdad

$$4S^2\left(p - \frac{abc}{2S} - \frac{S}{p}\right)\left(p + \frac{abc}{2S} + \frac{S}{p}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2).$$

II.340. Supongamos lo contrario, por ejem-

plo, que $c \geqslant a$; entonces, $2c \geqslant c + a > b$; al cuadrar y sumar las desigualdades, obtenemos: $5c^2 > a^2 + b^2$, lo que es una contradicción.

II.341. La bisectriz del ángulo B es la bisectriz del $\angle OBH$ y la bisectriz del ángulo A es la bisectriz del $\angle OAH$. A continuación, $\angle BAH = 90° - \angle B < 90° - \angle A = \angle ABH$; por lo tanto, $|AH| > |BH|$. Si K y M son los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos A y B con OH, entonces $\frac{|HK|}{|KO|} = \frac{|AH|}{|AO|} = \frac{|AH|}{R} > \frac{|BH|}{|R|} = \frac{|BH|}{|OB|} = \frac{|HM|}{|MO|}$. De esta manera, $|HK| > |HM|$ y el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos A y B se sitúa en el interior del $\triangle BOH$.

II.342. Designemos $|AB| = |BC| = a$, $|AM| = c$, $|MC| = b$, $|MB| = m$, $\angle BMO = \psi$, $\angle MBO = \varphi$. Hay que demostrar que $|OB| > |OM|$ o $\psi > \varphi$, o bien $\cos\psi < \cos\varphi$. Según el teorema de los cosenos, para el $\triangle MBA$ y el $\triangle MBC$ obtenemos:

$$\cos\varphi - \cos\psi = \frac{m^2 + a^2 - c^2}{2ma} - \frac{m^2 + b^2 - a^2}{2mb} = \\ = \frac{m^2(b-a) - a(b^2 - a^2) + b(a^2 - c^2)}{2mab};$$

pero $a - c = b - a$; por consiguiente,

$$\cos\varphi - \cos\psi = \frac{(b-a)(m^2 - ab - a^2 + ab + bc)}{2mab} = \\ = \frac{(b-a)(m^2 - a^2 - b(2a-b))}{2mab} = \\ = \frac{(b-a)(m+b-a)(m-a+b)}{2mab} > 0,$$

lo que había que demostrar.

II.343. Tracemos por M la recta paralela a AC hasta que se interseque con AB en el punto K. Encontramos fácilmente: $|AK| = |CM| \cdot \frac{|AB|}{|CB|}$, $|MK| = |MB| \times \frac{|AC|}{|CB|}$. Puesto que $|AM| \leqslant |AK| + |KM|$, sustituyendo $|AK|$ y $|KM|$, obtenemos

$$|AM| \leqslant \frac{|CM| \cdot |AB|}{|BC|} + \frac{|MB| \cdot |AC|}{|CB|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|AM| - |AC|)\,|BC| \leqslant$$

$$\leqslant (|AB| - |AC|)\,|MC|,$$

lo que era necesario.

II.344. El mínimo es igual a $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ y se logra, si M es el centro de masas del $\triangle ABC$.

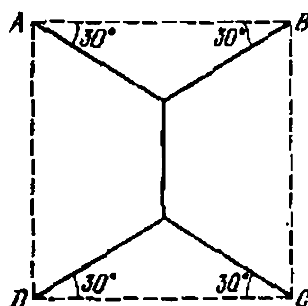


Fig. 61

(Se puede demostrarlo aplicando, por ejemplo el método de coordenadas o valiéndose del teorema de Leibniz: véase el problema II.140.)

II.345. «Enderecemos» el camino de la bola: para esto, en vez de «rechazar» la bola del borde, hagamos rechazar de manera especular respecto a este borde la mesa misma. Obtendremos un sistema de rayos con vértice común; cualesquiera dos rayos vecinos forman el ángulo α. El número máximo de rayos del sistema que la recta puede cortar, es precisamente el número máximo de rechazos de la bola. Este número es igual a $\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]+1$, si $\frac{\pi}{\alpha}$ no es un número entero ($[x]$ es la parte entera del número x); pero si $\frac{\pi}{\alpha}$ es un número entero, éste es igual al número máximo de rechazos.

II.346. Si los caminos se construyen de la manera mostrada en la fig. 61 (A, B, C y D son las aldeas, los caminos son las líneas continuas), su longitud total será $2+2\sqrt{3}<$ $<5{,}5$. Se puede mostrar que la disposición indicada de los caminos realiza el mínimo de su longitud total.

II.347. Si uno de los lados del triángulo que pasa por A, forma el ángulo φ con la recta perpendicular a las rectas paralelas dadas, el otro lado del triángulo forma un ángulo de $180°-\varphi-\alpha$; después de encontrar estos lados, obtendremos que el área del triángulo es igual a $-\frac{ab\operatorname{sen}\alpha}{2\cos\varphi\cos(\varphi+\alpha)}=$ $=-\frac{ab\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha+\cos(\alpha+2\varphi)}$. Esta expresión es

mínima, si $\alpha + 2\varphi = 180°$. *Respuesta*: $S_{mín} = ab \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

II.348. Tenemos $S_{ACBD} = \frac{|AB|}{|MO|} S_{OCD} = 2(k+1) S_{OCD}$. Por consiguiente, S_{ACBD} será máxima, cuando lo sea el área del triángulo OCD. Pero el triángulo OCD es isósceles con el lado igual a R; por lo tanto, su área es máxima, cuando alcanza su máximo el seno del ángulo en el vértice O. Designemos este ángulo por φ. Es evidente que $\varphi_0 \leqslant \varphi < \pi$, donde φ_0 corresponde al caso de perpendicularidad de AB y CD. Por consiguiente, si $\varphi_0 \leqslant \pi/2$, el área máxima del $\triangle OCD$ corresponde al valor de $\varphi_1 = \pi/2$; pero si $\varphi_0 > \pi/2$, corresponde al valor $\varphi_1 = \varphi_0$. *Respuesta*: si $k \leqslant \sqrt{2} - 1$, entonces $S_{máx} = (k+1) R^2$; si $k > \sqrt{2} - 1$, entonces $S_{máx} = 2R^2 \sqrt{k(k+2)}/(k+1)$.

II.349. Supongamos que la recta BC satisface la condición del problema: $|BP| = |MC|$ (la sucesión de los puntos es: B, P, M, C). Demostremos que el área del cuadrilátero $ABNC$ es mínima. Tracemos otra recta que corta los lados del ángulo en los puntos B_1 y C_1. Sea que el punto B se halla entre los puntos A y B_1, entonces el punto C_1 se halla entre los puntos A y C. Hay que demostrar que $S_{BB_1N} > S_{CC_1N}$. Esta desigualdad es equivalente a la desigualdad $S_{BB_1P} > S_{CC_1P}$, puesto que $\frac{S_{BB_1P}}{S_{BB_1N}} = \frac{S_{CC_1P}}{S_{CC_1N}} = \frac{|AP|}{|AN|}$. Sumemos S_{BPC_1} a ambos miembros de la última desi-

gualdad. A la izquierda obtenemos $S_{HB_1P}+$ $+S_{BPC_1}=S_{BB_1PC_1}=S_{C_1CB_1}$ (se deduce de la igualdad $|BP|=|MC|$), y a la derecha, $S_{CC_1P}+S_{BFC_1}=S_{C_1CB}$. Pero, evidentemente, $S_{C_1CB_1}>S_{C_1CB}$. De manera análoga se analiza el caso, en que el punto B_1 se halla entre los puntos A y B. *Construcción*. Es suficiente trazar cualquier línea que corta los lados del ángulo dado y las rectas AN y AM en los puntos B_0, P_0, M_0 y C_0, respectivamente, de modo que $|B_0P_0|=|M_0C_0|$ y luego trazar por M la recta paralela a B_0C_0. Examinemos el paralelogramo AB_0DC_0; designemos por K y L los puntos de intersección de las rectas AP_0 y AM_0, respectivamente, con B_0D y C_0D. A partir de la igualdad $|B_0P_0|=|M_0C_0|$ se deduce que $S_{AB_0K}=S_{AC_0L}$. El problema se reduce a la construcción de dos triángulos equivalentes AB_0K y AC_0L, todos los ángulos de los cuales se conocen. Tomemos B_0 de manera arbitraria, construyamos el $\triangle AB_0K$. Indiquemos en AB_0 el punto E de modo que $\angle B_0KE=\angle ALC_0$. Construyamos el segmento AC_0 igual a $\sqrt{|B_0E||B_0A|}$. La recta B_0C_0 es la buscada. *Observación*. Examinemos el problema siguiente. Por el punto M interior al ángulo dado hay que trazar la recta que corte los lados del ángulo en los puntos B y C de tal manera, que el segmento BC sea mínimo. Del problema investigado se deduce que el segmento BC será mínimo en aquel caso, cuando $|BP|=|MC|$, donde P es la proyección del vértice del ángulo dado sobre BC. (Más aún, se deduce también que si el segmento BC posee la propiedad indicada,

para cualquier otra recta que pasa por M y corta los lados del ángulo en los puntos B_1 y C_1, la proyección del segmento B_1C_1 sobre el segmento BC será mayor que $|BC|$). Sin embargo, la construcción de semejante segmento no siempre es posible con ayuda de un compás y una regla.

II.350. Supongamos que M_1 y N_1 son otros dos puntos en los lados del ángulo (fig. 62).

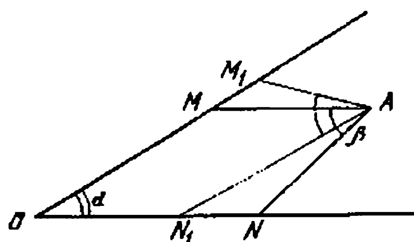


Fig. 62

Entonces, $\angle M_1AN_1 = \beta$, $\angle AM_1M = 360° - \alpha - \beta - \angle ON_1A > 180° - \angle ON_1A = \angle AN_1N$. De aquí, tomando en consideración que $\angle MAM_1 = \angle NAN_1$, obtenemos que $|M_1A| < |N_1A|$ y, por consiguiente, $S_{M_1AM} < S_{N_1AN}$; de este modo $S_{OM_1AN_1} < S_{OMAN}$.

II.351. Teniendo en cuenta el resultado del problema anterior, hay que aclarar bajo qué condiciones en los lados del ángulo se puede hallar los puntos M y N tales que $\angle MAN = \beta$ y $|MA| = |AN|$. Circunscribamos alrededor del triángulo MON una circunferencia (fig. 63). Puesto que $\varphi + \psi + \beta < 180°$, el punto A estará fuera de ésta

Si L es el punto de intersección de la recta OA con la circunferencia, entonces deben cumplirse las desigualdades $\angle AMN = 90° - \frac{\beta}{2} > \angle LMN = \angle LON$ y $\angle ANM = 90° - \frac{\beta}{2} > \angle LOM$. De esta manera, si $\varphi < 90 - \frac{\beta}{2}$ y $\psi < 90° - \frac{\beta}{2}$, se puede encontrar los puntos $= M$ y N tales que $|MA| = |AN|$ $\angle MAN$ β. Pero si las condiciones no se

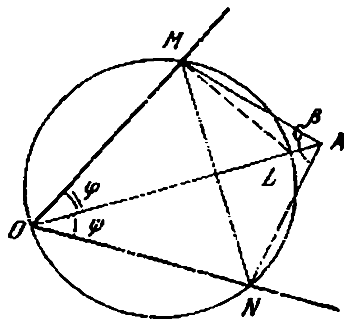


Fig. 63

cumplen, es imposible encontrar semejantes puntos. En este caso el cuadrilátero del área máxima degenera en triángulo (uno de los puntos M o N coincide con O).

II.352. Tomemos el punto A_1 en BC (fig. 64). El cuadrilátero OMA_1N es equivalente al cuadrilátero $OMAN$, $\angle MA_1N < \angle MAN$; por consiguiente, si se toma el punto M_1 en OB de manera que $\angle M_1A_1N = \angle MAN$, entonces $S_{OM_1A_1N} > S_{OMAN}$; resulta que el área del cuadrilátero $OMAN$ es

menor que el área del cuadrilátero máximo que corresponde al punto A_1, lo que, tomando en consideración los resultados de los dos problemas anteriores, demuestra la afirmación.

II.353. Sea, para concretar, que sen $\alpha \geqslant$ $\geqslant$ sen β; tomemos en la prolongación de AB el punto K de tal modo que $\angle BKC = \beta$, ya que $\angle CBK = \angle ADC$ (puesto que el cuadrilátero $ABCD$ es inscrito), entonces el $\triangle KBC$ es semejante al $\triangle ACD$. Pero $|BC| \geqslant |CD|$, por consiguiente, $S_{BCK} \geqslant S_{ADC}$ y $S_{AKC} \geqslant S_{ABCD}$. Pero $S_{AKC} =$

$$= \frac{a^2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{sen} \beta},$$

por consiguiente, $S_{ABCD} \leqslant \frac{a^2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{sen} \beta}$. Análogamente se demuestra que $S_{ABCD} \geqslant$ $\geqslant \frac{a^2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \operatorname{sen} \beta}{2 \operatorname{sen} \alpha}$.

II.354. Examínense otras posiciones de los puntos M_1 y N_1 ($\angle M_1AN_1 = \beta$) y muéstrese, teniendo en cuenta la condición de $\alpha + \beta > 180°$, que el triángulo «agregado» posee mayor área que el triángulo en el cual disminuye el área (de manera análoga a la solución del problema II.350).

II.355. Tomando en consideración el resultado del problema anterior y razonando de la misma manera que en el problema II.351, obtenemos que, si $\varphi > 90° - \frac{\beta}{2}$ y $\psi > 90° -$ $- \frac{\beta}{2}$, el cuadrilátero del área mínima existe y para éste $|MA| = |AN|$. Pero si esta condición no se cumple, el cuadrilátero busca-

do degenera (uno de los puntos M o N coincide con el vértice O).

II.356. Tomemos el punto A, para el cual se cumplen las condiciones del problema, y cualquier otro punto A_1. Trazando por A_1 las rectas paralelas a AM y AN, las cuales cortan los lados en los puntos M_1 y N_1, cercio-

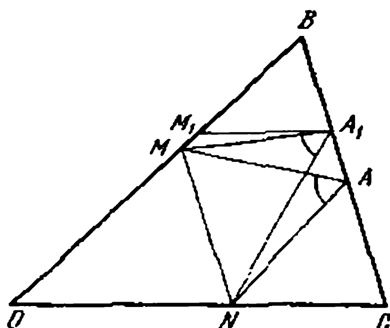


Fig. 64

rémonos de que $S_{OM_1A_1N_1} < S_{OMAN}$ y, por consiguiente, tanto más el área del cuadrilátero mínimo que corresponde al punto A_1 es menor, que el área del cuadrilátero $OMAN$, el cual es el cuadrilátero mínimo que corresponde al punto A.

II.357. El radio del círculo máximo es igual al radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo regular con el lado de $2R$, es decir, $2R/\sqrt{3}$. (Tomemos semejante triángulo y en sus lados usados como diámetros, construyamos las circunferencias). Para cualquier circunferencia de radio mayor, si ésta estuviera cubierta con los círculos dados, se

encontraría un arco no menor de 120°, cubierto por un círculo, pero semejante arco contiene una cuerda mayor de $2R$, lo que es una contradicción.

En el caso general, si existe un triángulo acutángulo con los lados $2R_1$, $2R_2$, $2R_3$, el radio de la circunferencia circunscrita alrede-

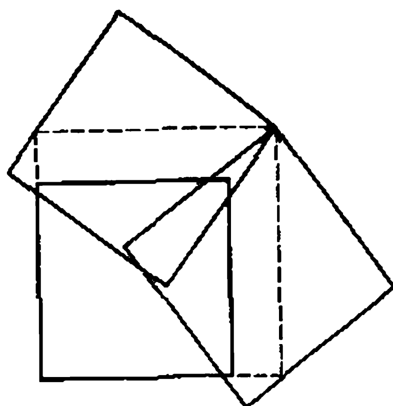


Fig. 65

dor de éste será el buscado. En todos los demás casos el radio del círculo máximo es igual al mayor de los números R_1, R_2, R_3.

II.358. Se puede. En la fig. 65 se exponen tres cuadrados unitarios que cubren un cuadrado con el lado 5/4.

II.359. Notemos al principio que el lado del triángulo regular mínimo que cubre el rombo con el lado a y el ángulo agudo de 60°, es igual a $2a$. En efecto, si los vértices de los ángulos agudos M y N del rombo se encuentran en los lados AB y BC del triángulo regular ABC y $\angle BNM = \alpha$, $30° \leqslant \alpha \leqslant 90°$,

entonces, después de encontrar $|BN|$ según el teorema de los senos a partir del $\triangle BNM$, y $|CN|$ según el teorema de los senos a partir del $\triangle KNC$ (K es el vértice del ángulo obtuso del rombo; además, se puede considerar que este vértice se sitúa en el lado AC), obtenemos después de las transformaciones: $|BC| = 2a\frac{\cos(60°-\alpha)}{\cos 30°}$; tomando en consideración que $30° \leqslant \alpha \leqslant 90°$, hallamos que $|BC| \geqslant 2a$. Es fácil ver que se puede cubrir un triángulo regular del lado 3/2 con tres triángulos regulares del lado 1. Para esto cada triángulo unitario se pone de tal manera que uno de sus vértices coincida con uno de los vértices del triángulo que se cubre, mientras que el punto medio del lado opuesto coincida con el centro del triángulo que se cubre.

Mostremos ahora que el triángulo regular del lado $b > 3/2$ no se puede cubrir con tres triángulos regulares unitarios. Si semejante recubrimiento fuera posible, los vértices A, B y C estarían cubiertos con triángulos diferentes y cada uno de los lados AB, BC, CA se cubriría con dos triángulos. Sea que A pertenece al triángulo I; B, al II; C, al III; el centro O del triángulo pertenece, por ejemplo, al triángulo I. Tomemos en AB y AC los puntos M y N tales que $|AM| = |AN| = \frac{1}{3}b$. Puesto que $|BM| = |CN| = \frac{2}{3}b > 1$, los puntos M y N también pertenecen al triángulo I y, por consiguiente, el rombo $AMON$ está cubierto por completo con el triángulo, cuyo

lado es menos de $2|AM|$ $(2|AM|>1)$, lo que es imposible.

II.360. Designemos las razones $\frac{|AM|}{|MC|}$, $\frac{|CN|}{|NB|}$ y $\frac{|ML|}{|LM|}$ por α, β y γ. Entonces (véase la solución del problema I.221) $P=Q\alpha\beta\gamma$, $S=Q(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$. Después hagamos uso de la desigualdad $(\alpha+1)\times\times(\beta+1)(\gamma+1)\geqslant(\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+1)^3$.

II.361. Sea que $\operatorname{ctg}\alpha=x$, $\operatorname{ctg}\beta=y$; entonces $\operatorname{ctg}\gamma=\frac{-xy+1}{x+y}=\frac{x^2+1}{x+y}-x$, $a^2\operatorname{ctg}\alpha+b^2\operatorname{ctg}\beta+c^2\operatorname{ctg}\gamma=(a^2-b^2-c^2)x+b^2(x+y)+c^2\frac{x^2+1}{x+y}$. El mínimo de la expresión $b^2(x+y)+c^2\frac{x^2+1}{x+y}$ con x fijo y $x+y>0$ se logra para tal y, para el cual se cumple la igualdad $b^2(x+y)=c^2\frac{x^2+1}{x+y}\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{c}{b}$. De este modo, $\frac{c}{b}=$ $=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta}$. Por lo tanto, el valor mínimo de la expresión dada en la condición se logra para tales α, β y γ, cuyos senos son proporcionales a los lados a, b y c, es decir, cuando los triángulos examinados son semejantes. Pero en este caso tiene lugar una igualdad (es fácil comprobarlo).

II.362. Designemos: $p-a=x$, $p-b=$ $=y$, $p-c=z$ (p es el semiperímetro). Dejando en el segundo miembro de la desigualdad $4S\sqrt{3}$, obtenemos después de transformar el

primer miembro (por ejemplo, $a^2 - (b - c)^2 = 4(p - b)(p - c) = 4yz$) y sustituir S según la fórmula de Herón la desigualdad $xy + yz + zx \geqslant \sqrt{3(x + y + z)xyz}$. Dividiendo ambos miembros de la desigualdad por $\sqrt{xyz}$ y sustituyendo $u = \sqrt{(xy)/z}$, $v = \sqrt{(yz)/x}$, $w = \sqrt{(zx)/y}$ ($x = uw$, $y = vu$, $z = wv$), obtenemos la desigualdad $u + v + w \geqslant \sqrt{3(uv + vw + wu)}$, la cual, después de elevarla al cuadrado, se reduce a la desigualdad conocida $u^2 + v^2 + w^2 \geqslant uv + vw + wu$.

II.363. Existen dos familias de triángulos regulares circunscritos alrededor del triángulo dado (véase el problema II.305). Construyamos sobre los lados del triángulo ABC hacia el exterior los triángulos regulares ABC_1, BCA_1, CAB_1 y circunscribamos alrededor de éstos las circunferencias. Los vértices de los triángulos de la primera familia se sitúan uno en cada una de estas circunferencias. Supongamos que O_1, O_2, O_3 son los centros de estas circunferencias ($\triangle O_1O_2O_3$ es regular, véase el problema II.304). El área máxima la tendrá el triángulo, cuyos lados son paralelos a los lados del triángulo $O_1O_2O_3$ (la secante que pasa por el punto de intersección de dos circunferencias, tiene longitud máxima cuando es paralela a la línea de centros; en este caso su longitud es dos veces mayor que la distancia entre los centros). El área del triángulo máximo será $S_0 = 4S_{O_1O_2O_3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3}\right)$, donde S es el área del triángulo dado

(véase la solución del problema II.305). Para los triángulos de la segunda familia el área del máximo será menor. Entre los triángulos regulares inscritos en el dado, el área mínima la tendrá aquel, cuyos lados son paralelos a los lados del triángulo máximo circunscrito. Esto se deduce del resultado del problema I.241. Su área es igual a $S_1 = S^2/S_0$. De esta manera, el área del triángulo regular circunscrito máximo es igual a $S_0 = \frac{\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)}{6} + 2S$ y el área del triángulo mínimo inscrito es $S_1 = \frac{S^2}{S_0}$, donde S es el área del triángulo dado.

II.364. Circunscribamos alrededor del triángulo AMC la circunferencia. Todos los triángulos A_1MC que se obtienen al desplazar M por el arco AC, son semejantes entre sí, por consiguiente, la razón $\frac{|CM|}{|A_1M|}$ será para ellos una misma. Por eso, si M es el punto del mínimo de la expresión $f(M) = \frac{|BM|\cdot|CM|}{A_1M}$, entonces BM ha de pasar por el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo AMC; de lo contrario se puede disminuir $|BM|$, dejando constante la razón $\frac{|CM|}{|A_1M|}$. Sea que ahora B_1 y C_1 son los puntos de intersección de las rectas BM y CM con la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, entonces $\frac{|BM|\cdot|CM|}{|A_1M|} = \frac{|CM|\cdot|AM|}{|B_1M|} = \frac{|AM|\cdot|BM|}{|C_1M|}$. Por con-

siguiente, las rectas AM y CM también deben pasar por los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos BMC y AMB, respectivamente. De tal modo, el punto M es el centro de la circunferencia inscrita (véase el problema II.125). Además, en este caso A_1 es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo CMB, $\operatorname{sen} \angle MBC = \frac{r}{|MB|}$, $\frac{|CM|}{\operatorname{sen} \angle MBC} = 2 \, |A_1M|$; por lo tanto, $\frac{|BM| \cdot |CM|}{|A_1M|} = 2r$. Regresemos al problema de que la función $f(M)$ alcanza el valor mínimo. El teorema de análisis conocido afirma que la función continua en un conjunto cerrado alcanza su valor máximo y el mínimo. En particular, este teorema es válido para la función de dos variables definida en un polígono. Sin embargo, a este problema el teorema no se aplica directamente: la función $f(M)$ no está definida en los vértices del triángulo ABC. Pero si se cortan los ángulos del triángulo, se obtiene un hexágono, en el cual $f(M)$ será ya una función continua y, por consiguiente, tendrá el valor mínimo. Se puede demostrar que en proximidad de la frontera del triángulo $f(M) > 2r$. Por eso, si los ángulos cortados son suficientemente pequeños, el valor mínimo de $f(M)$ en los hexágonos y, por lo tanto, también en el triángulo se logra, cuando M es el centro de la circunferencia inscrita; este valor mínimo es igual a $2r$. Por otra parte, $f(M)$ no toma su valor máximo, aunque está acotada. Demuéstrese que $f(M) <$ $< l$, donde l es la longitud del lado máximo

del triángulo ABC, para todos los puntos del triángulo, excluyendo los vértices, y $f(M)$ puede tomar valores tan próximos a l como se quiera.

II.365. Tomemos en los rayos MB y MC los puntos C_1 y B_1, respectivamente, de tal modo que $|MC_1| = |MC|$, $|MB_1| = |MB|$ ($\triangle MC_1B_1$ es simétrico a $\triangle MBC$ respecto a la bisectriz del ángulo BMC), C_2 y B_2 son, respectivamente, las proyecciones de C_1 y B_1 sobre la recta AM. Tenemos: $|BM| \times \times \operatorname{sen} \angle AMC + |CM| \operatorname{sen} \angle AMB = |B_1M| \operatorname{sen} \angle AMC + |C_1M| \operatorname{sen} \angle AMB = |B_1B_2| + |C_1C_2| \geqslant |B_1C_1| = a$. Al escribir otras dos desigualdades semejantes y al sumarlas, demostraremos la afirmación del problema. No es difícil comprobar que, si M coincide con el centro de la circunferencia inscrita, la desigualdad se transforma en igualdad.

II.366. a) Resolvemos, al principio, el problema siguiente. Sea M el punto en el lado AB del triángulo ABC, las distancias a partir de M hasta los lados BC y AC son iguales a u y v, respectivamente; h_1 y h_2 son las alturas bajadas sobre BC y AC, respectivamente. Demostrar que la expresión $\frac{h_1}{u} + \frac{h_2}{v}$ alcanza su valor mínimo, cuando M es el punto medio de AB. Designemos, como siempre, $|BC| = a$, $|AC| = b$, S es el área del $\triangle ABC$. Tenemos: $au + bv = 2S$, $v = \frac{2S - au}{b}$. Pongamos v en la expresión $\frac{h_1}{u} + \frac{h_2}{v} = t$ y ob-

tendremos $atu^2 - 2Stu + 2h_1S = 0$. El discriminante de esta ecuación no es negativo, $S^2(t^2 - 4t) \geqslant 0$, de donde $t \geqslant 4$. El valor mínimo de $t = 4$ se alcanza cuando $u = S/a = h_1/2$, $v = h_2/2$. De este problema se deduce que el valor mínimo del primer miembro de la desigualdad del punto a) se obtiene cuando M es el punto de intersección de las medianas. Análogamente se demuestran las desigualdades de los puntos b) y c). En el punto b) hace falta determinar para qué punto M en el lado AB el producto uv obtiene su valor máximo. En el punto c) dividamos previamente ambos miembros de la desigualdad por uvw y resolvamos el problema del mínimo de la función $(h_1/u - 1)(h_2/v - 1)$ para el punto M en AB.

II.367. Supongamos que para el triángulo acutángulo ABC se cumple la desigualdad $|AC| \leqslant |AB| \leqslant |BC|$; BD es la altura, O es el centro de la circunferencia circunscrita e I, el centro de la inscrita en el $\triangle ABC$; E es la proyección de I sobre BD. Puesto que $|ED| = r$, hay que demostrar que $|BE| \geqslant R = |BO|$. Pero BI es la bisectriz del ángulo EBO (BI es la bisectriz del ángulo ABC y $\angle ABD = \angle OBC$). $\angle BEI = 90°$, $\angle BOI \geqslant 90°$ (lo último se deduce de que la proyección de CI sobre BC no supera $|BC|/2$). Por consiguiente, $|BE| \geqslant |BO|$ (representemos BO simétricamente respecto a BI).

II.368. Puesto que el área del triángulo formado por las medianas del otro triángulo constituye $3/4$ partes del área del triángulo inicial y para cualquier triángulo $abc =$

$= 4RS$, hay que demostrar que para el triángulo acutángulo es válida la desigualdad

$$m_a m_b m_c > \frac{5}{8} abc. \qquad (1)$$

Para hacer los cálculos cómodamente supongamos que uno de los lados es igual a $2d$ y la mediana a este lado es igual a m. Puesto que el triángulo es acutángulo, entonces $m > d$. Designemos por t el coseno del ángulo agudo comprendido entre esta mediana y el lado $2d$, $0 \leqslant t < d/m$ ($t < d/m$ es la condición del carácter acutángulo del triángulo). Expresando los lados y las medianas por medio de d, m y t y poniendo las expresiones halladas en la desigualdad (1), después de las transformaciones obtenemos: $m^2 (9d^2 + m^2)^2 - 25d^2 \times \times (d^2 + m^2)^2 > t^2 d^2 m^2 (64m^2 - 100d^2)$. El primer miembro de la desigualdad se reduce a la forma $(m^2 - 4dm + 5d^2)(m^2 + 4dm + + 5d^2)(m^2 - d^2)$. Para $m > d$ esta expresión es positiva. Además, si $m = d$ (el triángulo es rectángulo), el primer miembro de la desigualdad no es menor que el segundo (la igualdad existe para $t = 0$). A continuación, si $d < < m \leqslant \frac{5}{4} d$, el segundo miembro de la desigualdad no es positivo y la desigualdad es válida. Sea que $m > \frac{5}{4} d$. En este caso, el segundo miembro de la desigualdad es menor que el valor obtenido para $t = d/m$. Pero cuando $t = d/m$, el triángulo de partida es rectángulo y para los triángulos rectángulos ya está demostrada la validez de la desigual-

dad no estricta. (Es suficiente repetir los mismos razonamientos respecto al otro lado del triángulo.) De esta manera está demostrado que para cualesquiera triángulos no obtusángulos, a excepción de los isósceles y rectángulos, es válida la dosigualdad (1); para los triángulos isósceles y rectángulos tiene lugar una igualdad.

II.369. Supongamos que M se halla en el interior del ABC a las distancias x, y y z, respectivamente, hasta los lados BC, CA y AB. El problema consiste en determinar el mínimo de $x^2 + y^2 + z^2$, bajo la condición de que $ax + by + cz = 2S_{ABC}$. Es evidente que este mínimo se logra para los mismos valores de x, y, z, que el mínimo de $x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda(ax + by + cz) = (x - \lambda a)^2 + (y - \lambda b)^2 + (z - \lambda c)^2 - \lambda^2(a^2 + b^2 + c^2)$, donde λ es un número arbitrario fijo (bajo la misma condición de que $ax + by + cz = 2S_{ABC}$). Al tomar $\lambda = \frac{2S_{ABC}}{a^2 + b^2 + c^2}$ (λ se encuentra a partir de las ecuaciones $x = \lambda a$, $y = \lambda b$, $z = \lambda c$, $ax + by + cz = 2S_{ABC}$), vemos que el mínimo de la última expresión se logra para $x = \lambda a$, $y = \lambda b$, $z = \lambda c$. Ahora, sea que el punto M está alejado de BC, CA y AB a las distancias λa, λb y λc, respectivamente, y el punto M_1 es simétrico a M respecto a la bisectriz del ángulo A. Puesto que $S_{AM_1C} = S_{AM_1B}$, entonces M_1 se sitúa en la mediana del ángulo A y esto significa que M se halla en la simediana de este ángulo (véase el problema II.171).

II.370. Supongamos que M es un punto

dispuesto en el interior del triángulo ABC, cuyo ángulo máximo es inferior a 120°. Hagamos girar el $\triangle AMC$ alrededor del punto A a un ángulo de 60° hacia el exterior respecto al $\triangle ABC$. En este caso, el punto C pasará al punto C_1 y el punto M, al punto M_1. La suma $|AM| + |BM| + |CM|$ es igual a la quebrada BMM_1C. Esta quebrada será mínima, cuando los puntos M y M_1 se hallan en el segmento BC_1. De aquí se deduce la afirmación del problema.

II.371. Supongamos que ABC es el triángulo acutángulo dado, A_1 es un punto en el lado BC; B_1, en CA; C_1, en AB; A_2 y A_3 son los puntos simétricos a A_1 respecto a los lados AB y AC (respectivamente). La quebrada $A_2C_1B_1A_3$ es igual al perímetro del triángulo $A_1B_1C_1$; por consiguiente, este perímetro, siendo fijo el punto A_1, será mínimo, cuando los puntos C_1 y B_1 se hallan en el segmento A_2A_3, y será igual a $|A_2A_3|$. Pero el $\triangle AA_2A_3$ es isósceles, $\angle A_2AA_3 = 2\angle BAC$, $|A_2A| = |A_3A| = |AA_1|$. Por lo tanto, $|A_2A_3|$ será mínimo, si AA_1 es la altura del $\triangle BAC$. Precisamente de la misma manera deben ser alturas también BB_1 y CC_1.

II.372. Si el ángulo máximo del triángulo es menor de 120°, la suma de distancias tomará el valor mínimo para el punto, desde el cual los lados se ven bajo el ángulo de 120° (véase el problema II.370). Esta suma es igual a $|BC_1|$ (designaciones del problema II.370). El cuadrado de esta suma es igual a $a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle C + 60°) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 +$

$+ c^2) + 2S\sqrt{3}$. Pero a partir del problema II.362 se deduce que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}$. Nos queda demostrar la desigualdad $S \geqslant 3\sqrt{3}r^2$. Esta desigualdad se demuestra bastante fácilmente; la misma expresa el hecho de que de todos los triángulos circunscritos alrededor de la circunferencia dada el área mínima la tiene el triángulo regular (para éste se cumple la igualdad). Para concluir la demostración hace falta comprobar la desigualdad $a + b \geqslant 6r$, puesto que para el triángulo con el ángulo superior a 120°, la suma de distancias hasta los vértices toma el valor mínimo en el vértice del ángulo obtuso.

II.373. Demostremos el segundo miembro de la desigualdad. Para concretar, sea que $b \geqslant c$.

1) Si $a \leqslant b$, entonces $2p = a + b + c = (b - a) + c + 2a < 2c + 2a \leqslant 2\frac{b}{a}c + 2a = 2\,\frac{bc + a^2}{a}$.

2) Si $a \geqslant b \geqslant c$, entonces $a < 2b$ y $2p = a + b + c = (b + c - a) + 2a \leqslant c + 2a < \frac{2bc}{a} + 2a = 2\,\frac{bc + a^2}{a}$.

El primer miembro de la desigualdad se deduce del segundo miembro y de la identidad $(b + c)(p - a) - bc\cos A = a\left(\frac{bc + a^2}{a} - p\right)$.

II.374. Tenemos: $\frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AL|}{|LD|} = \frac{|BK|}{|KD|}$, es decir, KN es paralela a CD, el cuadrilátero $KLMN$ es un paralelogramo. Sea que $|AK| = a$, $|KC| = b$, $|BK| = x$,

$|KD| = y$, $\frac{x}{y} \geqslant \frac{a}{b}$; entonces

$$S_{KLM} = S_{ALM} - S_{AKL} = \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 S_{ADC} -$$

$$- \frac{x}{x+y} \frac{a}{a+b} S_{ADC} = \frac{x}{x+y} \left(\frac{x}{x+y} -\right.$$

$$\left. - \frac{a}{a+b}\right) \frac{y}{y+x} S_{ABCD} < \frac{x^2 y}{(x+y)^3} S_{ABCD}.$$

Designemos: $y/x = t$. No es difícil demostrar que el valor máximo de la función $t/(1+t)^3$ se obtiene con $t = 1/2$ (por ejemplo, al tomar la derivada de esta función) y es igual a $4/27$. De esta manera, $S_{KLMN} = 2S_{KLM} < < \frac{8}{27} S_{ABCD}$.

II.375. Designemos los lados del $\triangle ABC$, como siempre, por a, b y c; I es el centro de la circunferencia inscrita. Es válida la igualdad vectorial siguiente (ésta se deduce de la propiedad de la bisectriz, véase el problema I.9):

$$\overrightarrow{IA} \cdot a + \overrightarrow{IB} \cdot b + \overrightarrow{IC} \cdot c = 0. \qquad (1)$$

Además, $|IB| < c$, $|IC| < b$. Estas desigualdades se deducen de que los ángulos AIB y AIC son obtusos. Tomemos el punto A_1 suficientemente próximo al punto A, de manera que sigan cumpliéndose las desigualdades $|I_1B| < c$, $|I_1C| < b$, donde I_1 es el centro de la circunferencia inscrita en el $\triangle A_1BC$. Los lados del $\triangle A_1BC$ son iguales a a, b_1, c_1. Lo mismo que para el $\triangle ABC$ escribamos la igualdad

$$\overrightarrow{I_1A_1} \cdot a + \overrightarrow{I_1B} \cdot b_1 + \overrightarrow{I_1C} \cdot c_1 = 0. \qquad (2)$$

Restemos (1) de (2):

$$a\,(\overrightarrow{I_1A_1}-\overrightarrow{IA})+\overrightarrow{I_1B}\cdot b_1+\overrightarrow{IB}\cdot b+$$

$$+\overrightarrow{I_1C}\cdot c_1-\overrightarrow{IC}\cdot c=0. \qquad (3)$$

Notemos que

$$\overrightarrow{I_1A_1}-\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{I_1I}+\overrightarrow{AA_1}, \qquad (4)$$

$$\overrightarrow{I_1B}\cdot b_1-\overrightarrow{IB}\cdot b=\overrightarrow{I_1B}\,(b_1-b)+\overrightarrow{I_1I}\cdot b, \qquad (5)$$

$$\overrightarrow{I_1C}\cdot c_1-\overrightarrow{IC}\cdot c=\overrightarrow{I_1C}\,(c_1-c)+\overrightarrow{I_1I}\cdot c. \qquad (6)$$

Sustituyendo en (3) las diferencias correspondientes según las fórmulas (4), (5), (6), obtenemos:

$$\overrightarrow{I_1I}\,(a+b+c)+\overrightarrow{AA_1}\cdot a+\overrightarrow{I_1B}\,(b_1-b)+$$

$$+\overrightarrow{I_1C}\,(c_1-c)=0.$$

Puesto que $|\overrightarrow{I_1B}|<c$, $|\overrightarrow{I_1C}|<b$, $|b_1-b|<$ $<|A_1A|$, $|c_1-c|<|\overrightarrow{A_1A}|$, entonces $|I_1I|=$ $=\frac{1}{a+b+c}|\overrightarrow{AA_1}\cdot a+\overrightarrow{I_1B}\,(b_1-b)+\overrightarrow{I_1C}\,(c_1-c)|<$ $<|AA_1|\cdot\frac{a+b+c}{a+b+c}=|AA_1|$.

De esto se puede deducir la afirmación del problema para cualquier posición de A_1. *Observación.* En esencia, se ha diferenciado la igualdad (1) y se ha demostrado que $|V_A|>$ $>|V_I|$, donde V_A y V_I son las velocidades, con las cuales se desplazan los puntos A e I.

II.376. Circunscribamos alrededor de los triángulos ABF, BCD y CAE las circunferencias. Estas tienen un punto común M. Puesto que los ángulos del triángulo DEF son constantes, $\angle D = \gamma$, $\angle E = \alpha$, $\angle F = \beta$, las circunferencias construidas y el punto M no dependen de φ. El lado DF (y, por consiguiente, también EF y ED) será máximo, cuando DF es perpendicular a BM. Sea φ_0 el ángulo que corresponde a esta posición. Entonces, $\angle MBC = \angle MCA = \angle MAB = 90° - \varphi_0$. Prolonguemos CM hasta que interseque a la circunferencia, circunscrita alrededor del triángulo AMB, en el punto F_1. Se puede encontrar que $\angle F_1BA = \alpha$, $\angle F_1AB = \beta$; F_1B resulta paralela a AC. Bajemos desde F_1 y B las perpendiculares F_1N y BL sobre AC. Puesto que $|F_1N| = |BL|$, entonces $\operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{ctg}(90° - \varphi_0) = \frac{|CN|}{|F_1N|} = \frac{|AN|}{|F_1N|} + \frac{|AL|}{|BL|} + \frac{|CL|}{|BL|} = \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma$. De esta manera, $\operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma$. *Observación*. El ángulo $\omega = 90° - \varphi_0$ se llama *ángulo de Brocard* y el punto M, *punto de Brocard*. Para cada triángulo existen dos puntos de Brocard. La posición del segundo punto M_1 se determina por la condición $\angle M_1BA = \angle M_1AC = \angle M_1CB$.

II.377. Supongamos que $\frac{|AC_1|}{|AB|} = x$, $\frac{|BA_1|}{|BC|} = y$, $\frac{|CB_1|}{|CA|} = z$. Consideremos que $x \leqslant 1/2$. Si suponemos que las áreas de los triángulos AB_1C_1, BC_1A_1 y CA_1B_1 son mayores que el

área del triángulo $A_1B_1C_1$, entonces $z \leqslant 1/2$ (a no ser así, $S_{AC_1B_1} \leqslant S_{A_1C_1B_1}$) e $y \leqslant 1/2$. Las áreas de todos los triángulos examinados se expresan fácilmente a través de S_{ABC} y x, y, z, por ejemplo: $S_{AB_1C_1} = x(1 - z) S_{ABC}$. La desigualdad $S_{A_1B_1C_1} < S_{AB_1C_1}$ se reduce a la forma $1 - x(1 - z) - y(1 - x) - z(1 - y) < x(1 - z)$. Al sumar tres desigualdades semejantes, obtenemos: $3 - 4x(1 - z) - 4y(1 - x) - 4z(1 - y) < 0$.

Puesto que la última desigualdad es lineal respecto a x, y, z, entonces, si la misma se cumpliera para ciertos x, y, z comprendidos entre 0 y 1/2, asimismo debería cumplirse también para cualquier juego de valores extremos de las variables, es decir, para cada variable igual a 0 o a 1/2. Pero se puede comprobar que esto no es así. La contradicción obtenida demuestra nuestra afirmación.

II.378. Sea que Q es el punto medio de OH. Como se conoce, Q es el centro de la circunferencia de los nueve puntos (véase el problema II.160). Tenemos: $|OH|^2 + 4|QI|^2 = 2|OI|^2 + 2|HI|^2$. Puesto que $|QI| = R/2 - r$ (basándonos sobre el teorema de Feuerbach, problema II.287), $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$ (fórmula de Euler, problema II.193) y tomando en consideración que $R \geqslant 2r$, obtenemos:

$$|OH|^2 = 2|IH|^2 + R^2 - 4r^2 \geqslant \geqslant 2|IH|^2.$$

II.379. Una idea elegante para demostrar las desigualdades de semejante tipo la pro-

puso Kazarinoff (Kazarinoff, Michigan Mathematical Journal, 1957, N° 2, págs. 97—98). Su esencia consiste en lo siguiente. Tomemos en los rayos AB y AC sendos puntos B_1 y C_1, respectivamente. Es obvio que la suma de las áreas de los paralelogramos construidos sobre AB_1 y AM y sobre AC_1 y AM es igual al área del paralelogramo, uno de cuyos lados es B_1C_1, mientras que el otro es paralelo a AM y es igual a $|AM|$ (véase también el problema II.40). Por consiguiente,

$$|AC_1|\,v + |AB_1|\,w \leqslant |B_1C_1|\,x. \qquad (1)$$

a) Supongamos que los puntos B_1 y C_1 coinciden con los puntos B y C; entonces, la desigualdad (1) dará la desigualdad $bv + cw \leqslant ax$. Al sumar tres desigualdades semejantes, obtenemos la requerida.

b) Si $|AB_1| = |AC|$, $|AC_1| = |AB|$, la desigualdad (1) dará la desigualdad $cv + bw \leqslant ax$ o $x \geqslant \frac{c}{a}v + \frac{b}{a}w$. Al sumar tres desigualdades semejantes, obtenemos:

$$x+y+z \geqslant \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)u + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)v + \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)w \geqslant 2(u+v+w).$$

c) En el punto a) se ha demostrado la desigualdad $ax \geqslant bv + cw$, de donde $xu \geqslant \frac{b}{a}uv + \frac{c}{a}wu$. De la misma manera $yv \geqslant \frac{a}{b}uv + \frac{c}{b}vw$, $zw \geqslant \frac{a}{c}uw + \frac{b}{c}vw$. Al sumar estas tres desigualdades, obtenemos

$$xu+yv+zw \geqslant \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)uv+$$
$$+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)vw+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)wu \geqslant$$
$$\geqslant 2(uv+vw+wu).$$

d) Designemos por A_1, B_1, C_1 las proyecciones del punto M sobre los lados BC, CA, AB, respectivamente, del triángulo ABC. Tomemos en los rayos MA, MA_1, MB, MB_1, MC, MC_1 los puntos A', A'_1, B', B'_1, C', C'_1, respectivamente, de manera que $|MA|\,|MA'| = |MA_1|\cdot|MA'_1| = |MB|\,|MB'| = |MB_1|\,|MB'_1| = |MC|\cdot|MC'| = |MC_1|\cdot|MC'_1| = d^2$ *). Se puede demostrar que los puntos A', B', C' se hallan en las rectas $B'_1C'_1$, $C'_1A'_1$, $A'_1B'_1$, respectivamente, además, MA', MB', MC' son, correspondientemente, perpendiculares a estas rectas. De esta manera, en el $\Delta A'_1B'_1C'_1$ las distancias desde M hasta los vértices son iguales a $\frac{d^2}{u}$, $\frac{d^2}{v}$, $\frac{d^2}{w}$, mientras que hasta los lados opuestos, a $\frac{d^2}{x}$, $\frac{d^2}{y}$, $\frac{d^2}{z}$. Empleando la desigualdad del punto b), obtenemos la desigualdad requerida.

e) Adoptemos en la desigualdad (1) $b_1 = c_1 = l$; entonces, $a_1 = 2l \operatorname{sen} \frac{A}{2}$. Tendremos $x \geqslant \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2}}(u+v)$. Al obtener las desigual-

*) Esta transformación se llama *inversión*. Véase la observación a la solución del problema II.240, así como el Apéndice al final del libro.

dades análogas para y y x y multiplicándolas, obtenemos: $xyz \geqslant \frac{1}{8 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}} \times$

$\times (u+v)(v+w)(w+u) = \frac{R}{2r}(u+v)(v+w) \times$

$\times (w+u)$ $\left(\text{la igualdad } \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2} = \right.$

$\left. = \frac{r}{4R} \text{ se ha demostrado al resolver I.240}\right)$.

f) De la desigualdad aducida en el punto anterior se deduce: $xyz \geqslant \frac{R}{2r} 2\sqrt{uv} \cdot 2\sqrt{vw} \times$

$\times 2\sqrt{wu} = \frac{4R}{r} uvw.$

g) Al dividir una por otra las desigualdades de los puntos d) y f), obtenemos la desigualdad que se demuestra.

Observación. En la desigualdad del punto a) la igualdad se logra para cualquier triángulo acutángulo, cuando M coincide con el punto de intersección de las alturas del triángulo. En los puntos b), c), d) y g) la igualdad se obtiene para el triángulo equilátero, cuando M es el centro de este triángulo. En los puntos e) y f), la igualdad se logra en cualquier triángulo, cuando M es el centro de la circunferencia inscrita.

II.380. Examinemos la clase de los triángulos semejantes entre sí. En calidad del representante de esta clase elijamos tal triángulo ABC, en el cual $|AB| = v$, $|BC| = u$, $|AC| = 1$; además, $u \leqslant v \leqslant 1$. De este modo, a cada clase de triángulos semejantes entre sí le corresponderá el punto B en el inte-

rior del triángulo curvilíneo CDE, donde D es el punto medio de AC, el arco EC es un arco de la circunferencia con el centro en el punto A y radio 1, $ED \perp AC$ (fig. 66). Llamaremos el triángulo ABD «izquierdo» y el triángulo BDC, «derecho». Examinemos el proceso descrito en el planteamiento del problema; además,

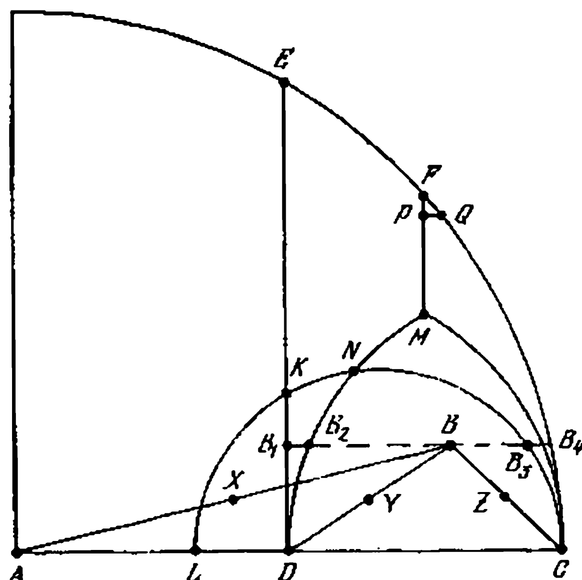


Fig. 66

a cada paso dejaremos sólo los triángulos, para los cuales no hemos encontrado triángulos semejantes. Para cada triángulo tomaremos un representante de la clase que aquél define, descrita anteriormente. Supongamos que X, Y, Z son los puntos medios de AB, DB, CB, respectivamente; $m = |DB|$, h es la altura del $\triangle ABC$.

Para los triángulos «derechos» son posibles tres casos.

1) $u \leqslant 1/2$, $m \leqslant 1/2$ ó $u \leqslant m$, $1/2 \leqslant m$, es decir, el lado más grande es DC o BD. Este caso tiene lugar, si B se encuentra en el interior de la figura $DMFC$, donde DM es el arco de una circunferencia de radio 1/2 con el centro en el punto C, FC es la parte derecha del arco EC, $|DM| = |MC| = 1/2$, DC y FM son segmentos, $FM \perp DC$. Además, el arco MC (cuyo centro es D) separa la región, para la cual en el $\triangle DBC$ el lado más grande es DC, de la región, para la cual el lado más grande es DM. El representante del $\triangle DBC$ en este caso tiene la altura igual a $2h$, si el lado más grande es DC, o

$$\frac{h}{2m^2} \geqslant \frac{h}{2\,|DB_4|^2} = \frac{h}{\frac{5}{2} - 2\sqrt{1-h^2}} = q_1(h)\,h,$$

$q_1(h) > 1$ si $h < \sqrt{7}/4$.

2) $u > m$, $u > 1/2$, $v > 2m$. Notemos que la igualdad $v = 2m$ tiene lugar en la circunferencia con el diámetro LC, donde $|AL| = 1/3$. En el interior de esta circunferencia $v > 2m$. Este caso tiene lugar, si el punto B se halla en el interior del triángulo curvilíneo DKN (KN y ND son arcos, DK es un segmento). Puesto que el triángulo DZC es semejante al triángulo de partida ABC, examinemos sólo el $\triangle DZB$. Su lado más grande es DZ igual a $v/2$. Su representante tendrá la altura igual a $\frac{h}{4\,(v/2)^2} = \frac{h^2}{v^2} \geqslant \frac{h}{|AB_2|^2} \geqslant \frac{h}{|AB_3|^2} =$

$$= \frac{h}{5/9 + (4/3)\sqrt{1/9 - h^2}} = q_2(h)\,h_1. \quad q_2(h) > 1.$$

3) $u \geqslant 1/2$, $u \geqslant m$, $v \leqslant 2m$. En este caso en el $\triangle BZD$ el lado más grande es BD igual a m y no hay necesidad de continuar examinando las demás partes del $\triangle BDC$, puesto que el $\triangle BYZ$ es semejante al $\triangle BDC$, mientras que el $\triangle DYZ$ es semejante al $\triangle ABD$ (ya no examinamos el $\triangle DZC$).

Para los triángulos «izquierdos» hay dos casos posibles, análogos a los casos 2 y 3 para los triángulos «derechos».

2′) Si B se halla en el interior de la figura $DKNC$, para los estudios ulteriores dejamos el triángulo DXB igual al triángulo DZB; su representante tiene una altura no menor que $q_2(h)\,h$.

3′) Si B se encuentra fuera de la figura $DKNC$, el estudio ulterior de las partes del $\triangle ABD$ se termina.

Notemos que el coeficiente $q_2(h)$ con el crecimiento de h aumenta, mientras que $q_1(h)$ decrece y pasa a ser igual a 1 en el punto F, $h = \sqrt{7}/4$. Tomemos los puntos P y Q en FM y el arco FC suficientemente próximos a F. En el interior de la figura $B_1KNMPQB_4$ se cumplen las desigualdades $q_1(h) \geqslant q_0$, $q_2(h) \geqslant q_0$, $q_0 > 1$. Por consiguiente, el coeficiente de crecimiento h en todos los casos no es menor que q_0, y dentro de un número finito de pasos o para todos los triángulos examinados tendrá lugar el caso 3, o bien el vértice del triángulo estará en el interior del triángulo curvilíneo PFQ. La situación, cuando el punto B se encuentra en el interior de PFQ se examina fácilmente por separado. Además, hace falta examinar los triángulos «derechos». Es sufi-

ciente cumplir la condición $|FP| \leqslant |FM| = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$. En el $\triangle BDC$ el lado BD, igual a m, es el más grande: $h^2 \leqslant 7/16$. Es fácil mostrar que al representante de la clase de triángulos semejantes a BDC le corresponderá un punto dispuesto fuera del triángulo curvilíneo PFQ. Y como en este caso la altura no disminuirá, para ambas partes del $\triangle BDC$ tendrá lugar el caso 3. Con esto concluye la demostración de la primera parte.

La segunda parte se deduce del resultado del problema II.327, así como del hecho de que todos los triángulos, que se examinan después de la primera división, tienen un representante, cuya altura no es menor que h, y, por consiguiente, el ángulo mínimo no es menor que $\angle B_4AC > \frac{1}{2}\angle B_1AC \geqslant \frac{1}{2}\angle BAC$.

II.381. Enunciemos y demostremos el resultado más expresivo, que el que se necesita según la condición, obtenido por M. D. Kovaliov. Entre todas las figuras convexas que cubren cualquier triángulo con los lados que no superan la unidad, el área mínima la tiene el triángulo ABC, en el cual $\angle A = 60°$, $|AB| = 1$ y la altura bajada sobre AB es igual a cos 10°. El área de este triángulo es igual a $\frac{1}{2}\cos 10° \approx 0{,}4924$.

1) Notemos que para nosotros es suficiente encontrar un triángulo que cubra cualquier triángulo isósceles, cuyos lados son iguales a 1 y el ángulo φ entre ellos no supera a 60°. Esto se deduce del hecho de que cualquier tri-

ángulo, cuyos lados no superan a 1, puede cubrirse con un triángulo isósceles de tipo indicado.

2) Demostremos que cualquier triángulo isósceles indicado en el punto 1) puede cubrirse con el $\triangle ABC$. Construyamos una circunferencia con el centro en el punto C y el radio 1. Sean K, L, M y N los puntos sucesivos de su intersección con CB, BA y AC (L y M se hallan en BA), $\angle LCM = \angle MCN = 20°$. Por consiguiente, los triángulos isósceles con el ángulo $0 \leqslant \varphi \leqslant 20°$ se cubren con el sector CMN, mientras que los triángulos, en los cuales $20° < \varphi \leqslant \angle C$ se cubren por el $\triangle ABC$, si los extremos de la base se toman en los arcos KL y MN y el tercer vértice, en el punto C. Construyamos ahora la circunferencia de radio unitario con el centro en el punto A. Esta circunferencia pasa por el punto B, por segunda vez corta BC en el punto P, y el lado AC, en el punto Q. Obtenemos: $\angle PAB = 180° - 2\angle B < \angle C$, puesto que B es el ángulo máximo del $\triangle ABC$. Por consiguiente, al tomar el vértice del triángulo isósceles en el punto A y los extremos de la base en el punto B y en el arco PQ, se puede cubrir cualquier triángulo isósceles, para el cual $\angle C < \varphi \leqslant 60°$ (incluso $180° - 2\angle B \leqslant \varphi \leqslant 60°$).

3) Demostremos que para cualquier disposición del triángulo isósceles DEF, en el cual $\angle DEF = 20°$, $|DE| = |EF| = 1$ y del triángulo equilátero XYZ con el lado 1 en el plano, el área de la figura convexa mínima que contiene los triángulos DEF y XYZ no es menor que $\frac{1}{2}\cos 10°$. Primero notemos que

el lado del triángulo regular mínimo que contiene DEF, es igual a $\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 10^\circ$. (Es válida la afirmación siguiente: si es posible situar un triángulo en el interior del otro, se puede disponerlo de manera que dos de sus vértices se encontrarán en los lados del triángulo mayor. No vamos a demostrar esta afirmación general. Es suficiente comprobar su validez en el caso, cuando uno de éstos es el $\triangle DEF$, mientras que el otro es regular. No es difícil hacerlo.) Examinemos ahora el triángulo regular mínimo $X_1Y_1Z_1$ con los lados paralelos a los del triángulo XYZ que contiene los triángulos DEF y XYZ. El lado del triángulo $X_1Y_1Z_1$ no es menor que $\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 10^\circ$, mientras que la altura no es menor que $\cos 10^\circ$. En los lados del $\triangle X_1Y_1Z_1$ que no contienen los lados del $\triangle XYZ$, deben hallarse los vértices del $\triangle DEF$. Por consiguiente, la suma de distancias a partir de los vértices del $\triangle DEF$ que se encuentran fuera del $\triangle XYZ$, hasta los lados correspondientes del $\triangle XYZ$ no es menor que $\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}$, mientras que el área del polígono convexo mínimo que contiene el $\triangle DEF$ y el $\triangle XYZ$, no es menor que $\frac{1}{2}\left(\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\cos 10^\circ$. (M. D. Kovaliov demostró también que la cobertura convexa de área mínima, encontrada por nosotros para los triángulos, cuyos lados superan la unidad, es la única.)

Apéndice

Definición de la inversión

Examinemos en el plano una circunferencia α con el centro en el punto O y el radio R. Para cada punto A distinto de O determinemos el punto A' de la manera siguiente. El punto A' está dispuesto en el rayo OA; además, $|OA'|\cdot|OA| = R^2$. De este modo, para todos los puntos del plano, a excepción del punto O, se plantea la transformación que llamaremos *inversión respecto a la circunferencia* α. Esta transformación se llama también *simetría respecto a la circunferencia* y los puntos A y A', *puntos simétricos respecto a la circunferencia* α. (Si la recta se considera como una circunferencia de radio infinito, entonces la simetría respecto a la recta puede representarse como el caso límite de simetría respecto a la circunferencia.) El punto O se llama *centro de la inversión* y la magnitud $k = R^2$, *potencia de la inversión*. Es evidente que los puntos A y A' se cambian de lugares, A pasa a A', A' pasa a A. Todos los puntos de la circunferencia α, y solamente ellos, permanecen inmóviles. Los puntos interiores de la circunferencia α pasan a ser exteriores y viceversa.

Se puede «completar» el plano con «un punto infinitamente alejado» (∞) y considerar que durante la inversión el punto O pasa a ∞, mientras que ∞ pasa al punto O.

En lo ulterior, designaremos los puntos, a los cuales los puntos A, B, C . . . pasan durante la inversión, por A', B', C' . . .

Propiedades de la inversión

Enumeremos algunas propiedades principales de la inversión, dejando sin demostrar las más evidentes y simples y trazando el esquema de razonamientos en todos los demás casos. (Al lector le toca completar los razonamientos con los eslabones que faltan, analizar las diferentes variantes de disposición de las figuras, así como realizar los cálculos y los dibujos.)

1. Una recta que pasa por el centro de la inversión, se transforma en sí misma.

2. Si los puntos O, A y B no se hallan en una recta, los triángulos OAB y $OB'A'$ son semejantes. Son homólogos los vértices A y B', B y A'. Además, $|A'B'| = (k\,|AB|)/ /|OA|\cdot|OB|$.

Notemos que la última igualdad es válida también si los puntos O, A y B se encuentran en una recta.

3. La recta que no pasa por el centro de la inversión O, se transforma en la circunferencia que pasa por O. Además, si l es una recta dada, A es el pie de la perpendicular bajada desde O sobre l, entonces l se transforma en la circunferencia con el diámetro OA'.

Tomemos un punto arbitrario B en l. De la semejanza de los triángulos OAB y $OB'A'$ (propiedad 2) se deduce que $\angle OB'A' = \angle OAB = 90°$.

4. La circunferencia ω que pasa por el centro de la inversión O, se transforma en la recta perpendicular a otra recta que pasa por O y el centro de la circunferencia ω.

5. Si la recta l y la circunferencia ω se transforman una en otra en caso de inversión con el centro en O, la tangente a ω en el punto O es paralela a l.

6. La circunferencia ω que no pasa por O, se transforma en la circunferencia ω' que tampoco contiene O. Además, O es el centro exterior de semejanza de las circunferencias ω y ω'.

Para demostrar tracemos por O una recta y designemos por A y B los puntos de su intersección con la circunferencia (en particular, se puede considerar que A y B son puntos diametralmente opuestos de ω). Supongamos que B se halla en el segmento OA. Entonces, A' pertenece al segmento OB'. Si C es un punto arbitrario de la circunferencia, considerando la semejanza de los triángulos correspondientes (propiedad 2), tendremos $\angle A'C'B' =$ $= \angle OC'B' - \angle OC'A' = \angle OBC - \angle OAC =$ $= \angle ACB$.

Puesto que el número de puntos de intersección de dos líneas en caso de inversión no varía, entonces:

7. Dos circunferencias tangentes, en caso de inversión y conforme a la posición del centro de la inversión, se transforman en:

a) dos circunferencias tangentes (si O no se halla en ninguna de ellas);

b) una circunferencia y una recta tangente a ésta (O se sitúa en una de las circunferencias, pero no coincide con el punto de tangencia);

c) un par de rectas paralelas (O coincide con el punto de tangencia).

Ángulo entre circunferencias

Llámase ángulo entre dos circunferencias que se intersecan, al ángulo comprendido entre las tangentes a las circunferencias, las cuales pasan por uno de los puntos de intersección de éstas. Llámase ángulo entre la circunferencia y la recta que la interseca, al ángulo comprendido entre esta recta y la tangente a la circunferencia, la cual pasa por uno de los puntos de intersección. Además, se puede considerar que el ángulo entre las rectas no supera a 90°.

Es evidente que, al determinar el ángulo entre las circunferencias, la elección del punto de intersección no tiene importancia. También es evidente que el ángulo entre las circunferencias es igual al ángulo entre los radios trazados hacia el punto de intersección.

8. **En caso de inversión se conserva el ángulo entre las rectas, es decir, el ángulo entre las rectas es igual al ángulo entre sus imágenes.**

Si el centro de la inversión coincide con el punto de intersección de las rectas, la afirmación es trivial. Pero si este centro no coincide con el punto de intersección de las rectas, la misma se deduce de la propiedad 5 y de la definición del ángulo entre dos circunferencias o entre una circunferencia y una recta.

9. **En caso de inversión el ángulo entre dos circunferencias es igual al ángulo entre sus imágenes.**

Examinemos el caso, cuando el centro de la inversión no se halla en las circunferencias dadas. Supongamos que A es uno de los puntos de intersección de las circunferencias ω_1 y

ω_2, l_1 y l_2 son las tangentes a ω_1 y ω_2, respectivamente, que pasan por A. Supongamos adicionalmente que el centro de la inversión O no se halla en las rectas l_1 y l_2. En caso de inversión con el centro O las circunferencias ω_1 y ω_2 se transformarán en las circunferencias ω_1' y ω_2', respectivamente, mientras que las rectas l_1 y l_2, en las circunferencias l_1' y l_2', tangentes a ω_1' y ω_2', respectivamente, en el punto de su intersección A' (propiedad 7), es decir, el ángulo entre l_1' y l_2' es igual al ángulo entre ω_1' y ω_2' y, puesto que el ángulo entre l_1' y l_2' es igual al ángulo entre l_1 y l_2 (propiedad 8), entonces el ángulo entre ω_1' y ω_2' es igual al ángulo entre ω_1 y ω_2.

10. Si las circunferencias α y ω son ortogonales, es decir, el ángulo entre ellas es igual a $90°$, en caso de inversión respecto a α, la circunferencia ω se transforma en sí misma. Y viceversa, en caso de inversión respecto a la circunferencia α la circunferencia ω que no coincide con α, se transforma en sí misma, entonces α y ω son ortogonales.

Es evidente que la última propiedad es simétrica respecto a α y ω. Los radios de las circunferencias α y ω son iguales, respectivamente, a las tangentes trazadas desde el centro de una circunferencia hacia otra.

Basándonos en la propiedad 10, podemos definir la inversión de la manera siguiente. Todos los puntos de la circunferencia α se transforman en sí mismos. Pero si A no pertenece a α y no coincide con su centro, será imagen del punto A el punto A', el segundo punto de intersección de cualesquiera dos circunferencias

ortogonales a α, las cuales pasan por A. Ahora se comprende el sentido del segundo nombre de la inversión, definida como simetría respecto a la circunferencia. De esta definición y de la propiedad de inversión de conservar el ángulo entre las circunferencias que se intersecan, se deduce que:

11. Para cualquier circunferencia ω y dos puntos A y B que se transforman uno en otro en caso de inversión respecto a ω, serán sus imágenes en caso de inversión respecto a la circunferencia α, cuyo centro no pertenece a ω, la circunferencia ω' y los puntos A' y B', que pasan uno a otro en caso de inversión respecto a ω'. Pero si el centro de α se halla en ω, entonces ω pasará a la recta l y los puntos A y B, a los puntos A' y B', simétricos respecto a l.

Eje radical de dos circunferencias

Resolvamos el problema siguiente.

Se dan dos circunferencias no concéntricas ω_1 y ω_2. Hallar el lugar geométrico de los puntos M, para los cuales las tangentes trazadas hacia las circunferencias ω_1 y ω_2 son iguales entre sí.

Solución. Supongamos que O_1 y O_2 son los centros de las circunferencias ω_1 y ω_2, r_1 y r_2 son sus radios, A_1 y A_2 son los puntos de tangencia. Tenemos $|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = (|MA_1|^2 + r_1^2) - (|MA_2|^2 + r_2^2) = r_1^2 - r_2^2$. De esta manera, todos los puntos pertenecen a una recta perpendicular a O_1O_2. Esta recta se llama *eje radical* de las circunferencias ω_1 y ω_2. Para concluir la resolución de nuestro

problema nos queda determinar ¿qué puntos de la recta encontrada satisfacen a su condición? Se puede mostrar que si las circunferencias no se intersecan, convienen todos los puntos del eje radical. Pero si ω_1 y ω_2 se intersecan, el eje radical contiene su cuerda común; todos los puntos de la cuerda común no forman parte del lugar buscado de puntos. Respectivamente, en caso de tangencia entre ω_1 y ω_2 se excluye el punto de tangencia.

Examinemos la circunferencia α con el centro M en el eje radical de las circunferencias ω_1 y ω_2 y el radio igual a la longitud de la tangente trazada desde M hacia ω_1 o ω_2. (Suponemos que M se encuentra fuera de ω_1 y ω_2.) La circunferencia α es ortogonal a las circunferencias ω_1 y ω_2. De esta manera, los puntos del eje radical dispuestos fuera de las circunferencias ω_1 y ω_2, si éstas se intersecan o son tangentes, son el lugar geométrico de los centros de las circunferencias ortogonales simultáneamente a ω_1 y ω_2, mientras que la inversión correspondiente transforma cada una de éstas en sí misma.

Ahora demostremos una propiedad más de la inversión.

12. Si las circunferencias ω_1 y ω_2 no se intersecan, existe una inversión que las transforma en circunferencias concéntricas.

Tomemos la circunferencia α ortogonal a ω_1 y ω_2 con el centro en la recta l que contiene los centros de ω_1 y ω_2. Puesto que las circunferencias ω_1 y ω_2 no se intersecan, semejante circunferencia α existe. Sea que O es uno de los puntos de intersección de la circunferen-

cia α con la recta l. En caso de inversión con el centro en O la recta l se transforma en sí misma, mientras que la circunferencia α, en la recta p. Las rectas l y p se intersecan y son ortogonales a las circunferencias ω_1' y ω_2' que son las imágenes de ω_1 y ω_2 en caso de inversión respecto a α. De aquí se deduce que los centros de ω_1' y ω_2' coinciden con el punto de intersección de las rectas l y p, es decir, ω_1' y ω_2' son circunferencias concéntricas. (Demuéstrese que si la recta es ortogonal a la circunferencia, ella pasa por su centro.)

Aquí es oportuno hacer una observación. Cualquier circunferencia ortogonal a ω_1' y ω_2', o sea, a las circunferencias concéntricas, es una recta, o sea, una circunferencia de radio infinito. Por consiguiente, en caso de inversión respecto a la circunferencia α todas las circunferencias ortogonales a ω_1 y ω_2 deben transformarse en rectas. Por consiguiente, todas las circunferencias ortogonales a ω_1 y ω_2 cortan la recta l en dos puntos fijos.

13. Para cualesquiera dos circunferencias ω_1 y ω_2 existe por lo menos una inversión que las transforma una en otra. La circunferencia que define esta inversión, se llama *circunferencia complementaria* de ω_1 y ω_2.

A continuación vamos a enunciar el teorema 13 de un modo más preciso. Si ω_1 y ω_2 se intersecan, existen precisamente dos inversiones, para las cuales ω_1 se transforma en ω_2 y viceversa. Pero si ω_1 y ω_2 entran en contacto o no se intersecan, hay una sola inversión semejante.

Examinemos al principio el caso de las

circunferencias que se intersecan. Hagamos la inversión I con el centro en uno de los puntos de su intersección. ω_1 y ω_2 se transformarán en las rectas l_1 y l_2 que se intersecan. Las rectas l_1 y l_2 tienen dos bisectrices, respecto a las cuales l_1 y l_2 son simétricas. Por consiguiente (propiedad 11), para la misma inversión I, estas bisectrices se transformarán en dos circunferencias, respecto a las cuales ω_1 y ω_2 son simétricas.

Si ω_1 y ω_2 no se intersecan, existe la inversión I (propiedad 12) que las transforma en las circunferencias concéntricas ω_1' y ω_2'. Supongamos que O es el centro de ω_1' y ω_2', r_1 y r_2 son sus radios. La inversión respecto a la circunferencia α' con el centro en O y el radio $\sqrt{r_1 r_2}$ transforma ω_1' y ω_2' una en otra. Para la inversión I la circunferencia α' se transformará en la circunferencia buscada α, respecto a la cual ω_1 y ω_2 son simétricas.

Al concluir este apartado demos la definición del centro radical de tres circunferencias. Examinemos tres circunferencias ω_1, ω_2 y ω_3, cuyos centros no se hallan en una recta. Se puede demostrar que los tres ejes radicales que corresponden a tres pares de estas circunferencias, se intersecan en el mismo punto M. Este punto se llama *centro radical* de las circunferencias ω_1, ω_2 y ω_3. Las tangentes trazadas desde M hacia las circunferencias ω_1, ω_2 y ω_3 son iguales entre sí. Por lo tanto, la inversión correspondiente con el centro en M transforma cada circunferencia ω_1, ω_2 y ω_3 en sí misma.

Problemas y ejercicios

1. Hállese la imagen del cuadrado para la inversión respecto a la circunferencia inscrita en éste.

2. Se da el triángulo ABC. Hallar todos los puntos O tales que la inversión con el centro en O transforme las rectas AB, BC y CA en las circunferencias de radio igual.

3. Sea que A', B', C' son las imágenes de los puntos A, B, C, respectivamente, para la inversión con el centro en el punto O. Demostrar que:

a) si O coincide con el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$, entonces el triángulo $A'B'C'$ es semejante al triángulo ABC;

b) si O coincide con el centro de la circunferencia inscrita, entonces el triángulo $A'B'C'$ es semejante al triángulo con vértices en los centros de las circunferencias exinscritas;

c) si O coincide con el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC, entonces el triángulo $A'B'C'$ es semejante al triángulo con vértices en las bases de las alturas del triángulo.

4. Los puntos A y A' son simétricos respecto a la circunferencia α, M es un punto arbitrario de esta circunferencia. Demostrar que la razón $|AM|/|A'M|$ es constante.

5. En la circunferencia α se trazan dos diámetros perpendiculares. Las rectas que unen los extremos de un diámetro con un punto arbitrario de la circunferencia α, cortan el segundo diámetro y su prolongación en los pun-

tos A y A'. Demostrar que A y A' son simétricos respecto a la circunferencia α.

6. Demostrar que si la circunferencia ω pasa por el centro de la circunferencia α, la imagen de ω en caso de inversión respecto a α es su eje radical.

7. Se da una circunferencia y dos puntos A y B en ésta. Examinemos los pares posibles de circunferencias que son tangentes a la dada en los puntos A y B y son tangentes entre sí en el punto M. Hallar el lugar geométrico de puntos M.

8. Se dan dos circunferencias tangentes. Una circunferencia arbitraria es tangente a una de éstas en el punto A y a otra, en el punto B. Demostrar que la recta AB pasa por un punto fijo del plano. (En caso de circunferencias iguales AB es paralela a la recta que pasa por sus centros.)

9. Se dan tres circunferencias α_1, α_2, α_3 que pasan por un punto. Se conoce que la recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias α_1 y α_2, contiene el centro de la circunferencia α_3; la recta que pasa por los puntos de intersección de α_2 y α_3, contiene el centro de la circunferencia α_1. Demostrar que la recta que pasa por los puntos de intersección de α_3 y α_1, contiene el centro de la circunferencia α_2.

10. Se dan dos circunferencias ω_1 y ω_2. Examinemos dos circunferencias arbitrarias tangentes a las circunferencias ω_1 y ω_2 en ciertos puntos, que se tocan en el punto M. Hallar el lugar geométrico de puntos M.

11. Demostrar que con ayuda de la inver-

sión cualesquiera dos circunferencias pueden transformarse en circunferencias iguales.

12. Demostrar que con ayuda de la inversión los cuatro puntos A, B, C, D, que no se hallan en una recta, pueden transformarse en vértices de un paralelogramo.

13. La inversión respecto a la circunferencia con el centro O y el radio R transforma la circunferencia con el centro A y el radio r en una circunferencia con el radio r'. Demostrar que $r' = (rR^2)/||OA|^2 - r^2|$.

14. En un plano se dan cuatro puntos A, B, C, D. Demostrar que $|AB|\cdot|CD| + |AD|\cdot|BC| \geqslant |AC|\cdot|BC|$.

15. En el triángulo ABC el lado AC es el más grande. Demostrar que para cualquier punto M es válida la desigualdad $|AM| + |CM| \geqslant |BM|$.

16. Demostrar que todas las circunferencias que pasan por el punto dado A y cortan la circunferencia α en los puntos diametralmente opuestos, contienen un punto fijo más, distinto de A.

17. Se dan cuatro puntos A, B, C, D. Demostrar que el ángulo entre las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos ABC y BCD es igual al ángulo entre las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos CDA y DAB.

18. La circunferencia ω pasa por el centro de la circunferencia α. A es un punto arbitrario de la circunferencia ω. La recta que pasa por A y el centro de la circunferencia α, corta la cuerda común de las circunferencias α y ω en el punto A'. Demostrar que A y A'

son simétricos respecto a la circunferencia α.

19. Se dan dos circunferencias que no se cortan y no contienen una a otra, y punto A dispuesto fuera de las circunferencias. Demostrar que existen precisamente cuatro circunferencias (entre éstas también pueden figurar rectas) que pasan por A y son tangentes a las circunferencias dadas.

20. Sea que s es el área de un círculo, cuyo centro se halla a una distancia a del punto O. La inversión respecto a la circunferencia con el centro O y el radio R transforma la circunferencia dada en una circunferencia con un área s'. Demostrar que $s' = s \cdot R^4/(a^2 - R^2)^2$.

21. Se dan dos circunferencias que entran en contacto entre sí. Examinemos otras dos circunferencias tangentes a las dadas y entre sí. Sea que r_1 y r_2 son los radios de dos últimas circunferencias y d_1 y d_2, las distancias a partir de sus centros hasta la recta que pasa por los centros de las circunferencias dadas. Demostrar que

$$\left|\frac{d_2}{r_2} - \frac{d_1}{r_1}\right| = 2 \text{ o bien } \frac{d_2}{r_2} + \frac{d_1}{r_1} = 2.$$

22. Supongamos que ω_1 y ω_2 son dos circunferencias que entran en contacto. Examinemos la sucesión de diferentes circunferencias α_0, α_1, $\alpha_2, \ldots$, α_n, ..., cada una de las cuales es tangente a ω_1 y ω_2 y, además, la circunferencia α_{k+1} es tangente a la circunferencia α_k. Designemos los radios de las circunferencias α_0, α_1, ..., α_n, por r_0, r_1, ...

$\ldots, r_n, \ldots$ y las distancias a partir de sus centros hasta la recta que pasa por los centros de ω_1 y ω_2, por $d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots$ Expresar d_n por r_n, si:

a) $d_0 = 0$ (este caso es posible, si ω_1 y ω_2 son tangentes interiormente);

b) $d_0 = kr_0$.

23. Supongamos que α_1 y α_2 son dos circunferencias que se intersecan; A y B son sus puntos de intersección; ω es una circunferencia arbitraria tangente a α_1 y α_2; r es el radio de la circunferencia ω; d es la distancia a partir de su centro hasta la recta AB. Demostrar que la razón r/d puede tomar sólo dos valores diferentes.

24. Se dan dos circunferencias α_1 y α_2 que no se intersecan, y un juego de circunferencias $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ tangentes a α_1 y α_2; además, ω_2 es tangente a ω_1; ω_3 es tangente a $\omega_2, \ldots, \omega_n$ es tangente a ω_{n-1}. Diremos que el sistema de circunferencias $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ forma una cadena, si ω_n y ω_1 tienen contacto entre sí. Demostrar que, si para las circunferencias α_1 y α_2 existe por lo menos una cadena de n circunferencias, entonces existe una cantidad infinita de cadenas. Además, para cualquier punto A en cualquier circunferencia α_1 o α_2 existe una cadena, para la cual A es el punto de tangencia de una de las circunferencias de la cadena.

25. Demostrar que si para las circunferencias α_1 y α_2 existe una cadena de n circunferencias que no se intersecan (véase el problema 24), entonces $(R \pm r)^2 - d^2 = 4Rr \operatorname{tg}^2 \times$ $\times (\pi/n)$, donde R y r son los radios de las

circunferencias α_1 y α_2, d es la distancia entre sus centros. (El signo «—» se toma, si una de las circunferencias se encuentra en el interior de la otra; se toma el signo «+», en el caso contrario.)

26. Examinemos tres circunferencias, cada una de las cuales es tangente a tres circunferencias exinscritas de cierto triángulo; además, cada una de estas circunferencias tiene contacto con una circunferencia exinscrita por el interior y con dos circunferencias, por el exterior. Demostrar que estas tres circunferencias concurren en un punto.

27. Supongamos que d_1, d_2, . . ., d_n son las distancias a partir del punto M, dispuesto en el arco A_1A_n de la circunferencia circunscrita alrededor del polígono regular de n lados $A_1A_2 \ldots A_n$, hasta los vértices A_1, A_2, . . ., A_n.

Demostrar que $\frac{1}{d_1d_2}+\frac{1}{d_2d_3}+\ldots+\frac{1}{d_{n-1}d_n}=$ $=\frac{1}{d_1d_n}$.

28. Supongamos que a_1, a_2, . . ., a_{n-1}, a_0 son los lados A_1A_2, A_2A_3, . . ., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 del polígono de n lados A_1A_2, . . ., A_n, inscrito en la circunferencia, p_1, p_2, . . ., p_{n-1}, p_0 son las distancias a partir de un punto arbitrario M dispuesto en el arco A_nA_1 de la circunferencia, hasta las rectas A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1. Demostrar que $\frac{a_0}{p_0}=$ $=\frac{a_1}{p_1}+\frac{a_2}{p_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{p_{n-1}}$.

2. Hay cuatro puntos que poseen la propiedad requerida: son los centros de la circunferencia inscrita en el triángulo y de tres circunferencias exinscritas.

3. b) Demuéstrese la semejanza de los triángulos OAB y OI_bI_a. Ahora, de la propiedad 2 se deducirá el paralelismo de las rectas $A'B'$ e I_aI_b.

7. Supongamos que α y β son circunferencias tangentes a la circunferencia dada ω en los puntos A y B. Para la inversión con el centro en A las circunferencias ω y α se transformarán en las rectas paralelas l y p; la circunferencia β, en la circunferencia β' tangente a l en el punto fijo B' y a la recta p en el punto M'. De esta manera, M' se halla en la recta que pasa por B' perpendicularmente a l. El lugar geométrico de puntos buscado es la circunferencia que pasa por A y B y es ortogonal a ω. Los mismos puntos A y B se excluyen. Su centro se encuentra en el punto de intersección de las tangentes a ω que pasan por A y B.

8. Supongamos que O es el punto de tangencia de las circunferencias dadas. En caso de inversión con el centro en O estas circunferencias se transformarán en un par de rectas paralelas, en las cuales se hallen los puntos A' y B'; además, el segmento $A'B'$ es perpendicular a ellas. La recta AB se transformará en la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo $A'B'O$, la cual, evidentemente, pasa

por el punto P simétrico al punto O respecto a la recta equidistante de las rectas paralelas obtenidas.

9. Supongamos que O es el punto de intersección de las circunferencias α_1, α_2, α_3; A_1, A_2, A_3 son, respectivamente, los puntos de intersección, distintos de O, de las circunferencias α_2 y α_3, α_3 y α_1, α_1 y α_2. En caso de inversión con el centro en O las circunferencias α_1, α_2, α_3 se transformarán en las rectas que forman el triángulo $A'_1A'_2A'_3$. A partir de la condición y de la propiedad 3 se deduce que $A'_3O \perp A'_1A'_2$, $A'_1O \perp A'_2A'_3$. Por consiguiente, O es el punto de intersección de las alturas del triángulo $A'_1A'_2A'_3$ y $A'_2O \perp A'_3A'_1$.

10. Si ω_1 y ω_2 se intersecan, el lugar geométrico buscado está formado por dos circunferencias, o sea, las circunferencias complementarias ω_1 y ω_2 (teorema 13), excluyendo los puntos de intersección de las circunferencias ω_1 y ω_2. Si ellas tienen contacto, entonces aquél está formado por una circunferencia complementaria, excluyendo el punto de tangencia. Para demostrar es suficiente hacer la inversión con el centro en el punto común de las circunferencias ω_1 y ω_2. Si ω_1 y ω_2 no tienen puntos comunes, conviene toda la circunferencia complementaria. En este caso hace falta hacer la inversión que transforme ω_1 y ω_2 en circunferencias concéntricas.

11. La propiedad necesaria la tiene cualquier inversión con el centro en la circunferencia complementaria, puesto que esta inversión transforma la circunferencia complementaria en una recta, respecto a la cual las imá-

genes de las circunferencias dadas son simé-ricas.

12. Examinemos dos casos.

1) Los puntos A, B, C, D se hallan en la circunferencia ω. Se puede suponer que los puntos dados son los vértices sucesivos de un cuadrilátero inscrito. Sea que O es el punto de intersección de la circunferencia ortogonal a ω, la cual pasa por A y C, con la circunferencia ortogonal a ω, la cual pasa por B y D. En caso de inversión con el centro en O el cuadrilátero $ABCD$ se transformará en el cuadrilátero inscrito $A'B'C'D'$, cuyas diagonales son diámetros, es decir, $A'B'C'D'$ es un rectángulo.

2) A, B, C, D no se hallan en una circunferencia. Designemos por ω_A, ω_B, ω_C, ω_D las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos BCD, CDA, DAB, ABC, respectivamente. Tomemos la circunferencia complementaria para ω_B y ω_D que separa los puntos B y D, y la circunferencia complementaria para ω_A y ω_C que separa los puntos A y C. Designemos por O el punto de su intersección. (Demuéstrese que estas circunferencias se intersecan.) En caso de inversión con el centro O los puntos dados pasarán a los vértices del cuadrilátero convexo $A'B'C'D'$, en el cual cada una de sus diagonales lo divide en dos triángulos con circunferencias circunscritas iguales (véase el problema 11); por consiguiente los ángulos opuestos del cuadrilátero son iguales; de aquí se deduce que $A'B'C'D'$ es un paralelogramo (demuéstrese).

13. Supongamos que la recta OA corta la

circunferencia con el centro en A, en los puntos B y C. Entonces, $|B'C'| = 2r'$. Ahora se puede hacer uso de la fórmula dada en el punto 2.

14. Hagamos la inversión con el centro A. Tendremos $|B'C'| + |C'D'| \geqslant |B'D'|$. Luego apliquemos la fórmula del punto 2.

15. Del problema anterior se deduce que $|AC| \cdot |BM| \leqslant |AB| \cdot |CM| + |BC| \times \times |AM|$. Puesto que AC es el lado más grande, entonces $|BM| \leqslant \frac{|AB|}{|AC|} \cdot |CM| + + \frac{|BC|}{|AC|} \cdot |AM| \leqslant |AM| + |MC|$.

16. Supongamos que A' se obtiene a partir de A en caso de inversión respecto a la circunferencia α. A_1 es simétrico a A' respecto al centro de la circunferencia α. Demuéstrese que todas las circunferencias indicadas en el planteamiento pasan por A_1.

17. Hagamos la inversión con el centro en A. El primer ángulo será igual al ángulo entre la recta $B'C'$ y la circunferencia circunscrita alrededor de $B'C'D'$; el segundo, al ángulo entre las rectas $D'C'$ y $D'B'$.

18. La inversión respecto a la circunferencia α transforma la recta AB en ω.

19. Hagamos la inversión con el centro en A. Entonces, la afirmación del problema es equivalente a la afirmación de que dos circunferencias, dispuestas una fuera de la otra, tienen precisamente cuatro rectas tangentes.

20. Supongamos que la recta que pasa por el centro de la inversión y el centro de la circunferencia dada, corta la circunferencia dada

en los puntos, cuyas coordenadas son iguales a x_1 y x_2 (el origen de las coordenadas es el punto O). Entonces,

$$s' = \frac{\pi}{4}\left(\frac{R^2}{x_1} - \frac{R^2}{x_2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{4}(x_1 - x_2)^2 \frac{R^4}{(x_1 x_2)^2} = s\frac{R^4}{(a^2 - R^2)^2}.$$

21. Notemos que para cualquier recta l que pasa por O, en caso de inversión con el centro O para una circunferencia arbitraria se cumple la igualdad $d/r = d'/r'$, donde r y r' son los radios de la circunferencia dada y de su imagen, d y d' son, respectivamente, las distancias a partir de sus centros hasta la recta l. Esto se deduce del hecho de que O es el centro exterior de semejanza de ambas circunferencias (propiedad 6).

Volvamos a nuestro problema. Hagamos la inversión con el centro en el punto de tangencia de las circunferencias dadas. Estas últimas se transforman en un par de rectas paralelas, la recta l que pasa por los centros de las circunferencias dadas, es perpendicular a éstas. Las circunferencias con radios r_1 y r_2 se transformarán en un par de circunferencias de radio igual a r', que son tangentes una a otra, así como al par de las rectas paralelas obtenidas. Ahora es evidente que, si los centros de dos últimas circunferencias se hallan por un lado de l y, para concretar, $d_2' > d_1'$, entonces $\frac{d_2'}{r'} - \frac{d_1'}{r'} = \frac{d_1'+2r'}{r'} - \frac{d_1'}{r'} = 2$. Si éstos se hallan por distintos lados, entonces $\frac{d_2'}{r'} + \frac{d_1'}{r'} = 2$.

Aprovechemos el resultado del problema anterior. Obtenemos en el caso a) $d_n = 2nr_n$; en el caso b) son posibles dos respuestas: $d_n = (2n + k) r_n$ y $d_n = |k - 2n| r_n$.

23. Hagamos la inversión con el centro en A; las circunferencias α_1 y α_2 se transformarán en dos rectas l_1 y l_2 que se intersecan en el punto B' dispuesto en la recta AB. Como se ha demostrado durante la solución del problema 21, $r/d = r'/d'$. Pero r'/d' es la razón entre el radio de la circunferencia tangente a l_1 y l_2, y la distancia a partir de su centro hasta la recta fija que pasa por el punto de intersección de l_1 y l_2. Por consiguiente, r'/d' toma sólo dos valores, según cuál de dos pares de ángulos verticales formados por l_1 y l_2 contiene la circunferencia.

24. Hagamos la inversión que transforma α_1 y α_2 en circunferencias concéntricas (véase el teorema 12). Después de esto la afirmación del problema pasa a ser evidente. Este teorema lleva el nombre de *porisma de Steiner*.

25. Si α_1 y α_2 son circunferencias concéntricas con radios R y r, entonces la validez de la igualdad $(R - r)^2 = 4Rr \cdot \operatorname{tg}^2 (\pi/n)$ $(d = 0)$ se obtiene fácilmente de la relación evidente: $R - r = (R + r) \cdot \operatorname{sen} (\pi/n)$, $R > r$. Hagamos la inversión, cuyo centro se halla a la distancia a del centro común de las circunferencias α_1 y α_2. Sea que, para concretar, $a > R$. Las circunferencias α_1 y α_2 se transformarán en las circunferencias α_1' y α_2', α_2' se halla en el interior de α_1'. Además, según la fórmula del problema 13, tendremos $R' = \frac{R\rho^2}{a^2 - R^2}$, $r' =$

$= \frac{r\rho^2}{a^2 - r^2}$, donde ρ^2 es la potencia de la inversión. Para encontrar d' que es la distancia entre los centros de las circunferencias α_1' y α_2', tracemos una recta por el centro de la inversión y los centros de α_1 y α_2; el segmento de esta recta, comprendido entre los primeros dos puntos de intersección con las circunferencias α_1 y α_2, es igual al espesor del anillo $(R - r)$. En caso de inversión aquél se transformará en un segmento con longitud

$b = \frac{(R-r)\rho^2}{(a-r)(a-R)}$ (véase el punto 2); por consiguiente $d' = |R' - r' - b| = \left| \frac{R\rho^2}{a^2 - R^2} - \frac{r\rho^2}{a^2 - r^2} - \right.$

$$\left. - \frac{(R-r)\rho^2}{(a-r)(a-R)} \right| = \frac{a(R^2 - r^2)\rho^2}{(a^2 - r^2)(a^2 - R^2)}.$$ Luego,

sustituyendo R' y r', según las fórmulas halladas anteriormente obtenemos

$$R' - r' = \frac{(R-r)(a^2 + Rr)\rho^2}{(a^2 - r^2)(a^2 - R^2)}.$$

Tenemos que comprobar la validez de la igualdad $(R' - r')^2 - (d')^2 = 4R'r' \operatorname{tg}^2(\pi/n)$. Expresando todas las magnitudes que figuran en ésta, por R, r, a, ρ y simplificando, reduzcamos a la igualdad $(R - r)^2 (a^2 + Rr)^2 - (R - r)^2 a^2 (R + r)^2 = 4Rr(a^2 - r^2) \times (a^2 - R^2) \operatorname{tg}^2(\pi/n)$. Pero $(R - r)^2 = 4Rr \operatorname{tg}(\pi/n)$. Por consiguiente, hay que comprobar que $(a^2 + Rr)^2 - a^2(R + r)^2 = (a^2 - r^2)(a^2 - R^2)$. Es fácil hacerlo.

El caso $a < R$ es idéntico al examinado. Pero si $r < a < R$, entonces α_1' y α_2' se sitúan

una fuera de otra y en la fórmula dada en la condición hace falta tomar el signo «+».

26. Hagamos la inversión con el centro en el centro radical de las circunferencias exinscritas, en cuyo caso las circunferencias exinscritas se transforman en sí mismas. En caso de esta inversión las rectas, en las cuales yacen los lados del triángulo, se transformarán en las circunferencias, las cuales se indican en la condición. Las tres circunferencias pasarán por el centro radical de las circunferencias exinscritas del triángulo.

27. Hagamos la inversión con el centro en M y la potencia 1. Además, los puntos A_1, A_2, . . ., A_n pasarán a los puntos A_1', A_2', . . ., A_n', dispuestos en una recta. Sea que el lado del polígono de n lados es igual a a. De la fórmula del punto 2 se deduce que $|A_1'A_2'| = \frac{1}{d_1d_2} a; |A_2'A_3'| = \frac{1}{d_2d_3} a;$ . . . $|A_{n-1}'A_n'| = \frac{1}{d_{n-1}d_n} a;$ $|A_1'A_n'| = \frac{1}{d_1d_n} a$. Introduciendo estas expresiones en la correlación evidente $|A_1'A_n'| = |A_1'A_2'| + |A_2'A_3'| + \ldots + |A_{n-1}'A_n'|$, llegamos al resultado requerido.

28. Hagamos la inversión con el centro en el punto M. Los vértices del polígono de n lados dado pasarán a n puntos dispuestos en una recta; además,

$$|A_1'A_n'| = |A_1'A_2'| + |A_2'A_3'| + \ldots + |A_{n-1}'A_n'| \qquad (*)$$

Designemos por p' la longitud de la perpendi-

cular bajada desde el punto M sobre la recta $A'_1A'_n$. A partir de la semejanza de los triángulos A_1MA_2 y $A'_1MA'_2$ (propiedad 2) se deduce que $\frac{|A_1A_2|}{|A'_1A'_2|}=\frac{p_1}{p'}$, $|A'_1A'_2| = \frac{a_1}{p_1}p'$. De manera análoga

$$|A'_2, A'_3| = \frac{a_2}{p_2}p', \quad \ldots, \quad |A'_{n-1}A'_n| = \frac{a_{n-1}}{p_{n-1}}p',$$

$$|A'_1A'_n| = \frac{a_0}{p_0}p'.$$

Introduciendo estas expresiones en la correlación (*) después de simplificar por p', llegamos a la igualdad requerida.